

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/刘家英,徐光霞主编. —2版. —上海:
华东师范大学出版社, 2014.6
ISBN 978-7-5675-2167-4

I. ①高… II. ①刘… ②徐… III. ①高等数学—高
等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 119554 号

高等数学(第二版)

主 编 刘家英 徐光霞
项目编辑 吴 余
装帧设计 创图文化

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
网 址 www.ecnupress.com.cn
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537
门市(邮购)电话 021-62869887
地 址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 店 <http://hdsdcbs.tmall.com>

印 刷 者 成都市海翔印务有限公司
开 本 787×1092 16 开
印 张 21
字 数 455 千字
版 次 2014 年 8 月第 2 版
印 次 2014 年 8 月第 1 次
书 号 ISBN 978-7-5675-2167-4/O·252
定 价 39.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

目 录

第 1 章 函数的极限与连续	1
1.1 初等函数	1
1.2 极限	11
1.3 极限的运算	22
1.4 函数的连续性	30
本章小结	37
复习题 1	39
第 2 章 导数与微分	42
2.1 导数的概念	42
2.2 导数的运算	49
2.3 高阶导数	60
2.4 微分	62
本章小结	68
复习题 2	69
第 3 章 微分中值定理与导数应用	72
3.1 微分中值定理	72
3.2 洛必达法则	75
3.3 导数的应用	80
3.4 曲线的凹凸性与拐点	87
本章小结	89
复习题 3	90



第4章 不定积分	92
4.1 不定积分的概念	92
4.2 不定积分的基本公式与性质	95
4.3 不定积分的计算	100
本章小结	111
复习题4	112
第5章 定积分及其运用	116
5.1 定积分的概念与性质	116
5.2 牛顿——莱布尼茨公式	123
5.3 定积分的计算	127
5.4 广义积分	132
5.5 定积分的应用	136
本章小结	142
复习题5	144
第6章 多元函数微积分	147
6.1 偏导数	147
6.2 全微分	155
6.3 二重积分的概念与性质	157
6.4 二重积分的计算	160
6.5 二重积分的应用	167
本章小结	169
复习题6	170
第7章 级数	173
7.1 无穷级数的概念与性质	173
7.2 常数项级数的判别法	177
7.3 幂级数及其收敛性	183
7.4 函数的幂级数展开	187
7.5 傅里叶级数	193
本章小结	200
复习题7	201
第8章 拉普拉斯(Laplace)变换	204
8.1 拉普拉斯变换的概念	204



8.2 拉普拉斯变换的性质	208
8.3 拉普拉斯逆变换	212
8.4 拉普拉斯变换的应用	217
本章小结	220
复习题 8	221
第 9 章 微分方程	222
9.1 微分方程的概念	222
9.2 一阶微分方程	225
9.3 二阶常系数线性微分方程	231
本章小结	237
复习题 9	238
第 10 章 线性代数	240
10.1 行列式的定义	240
10.2 行列式的性质	248
10.3 克莱姆(Cramer)法则	257
10.4 矩阵的概念	259
10.5 矩阵的运算	262
10.6 逆矩阵	269
10.7 矩阵的初等变换	275
10.8 矩阵的秩	285
10.9 线性方程组	288
本章小结	295
复习题 10	296
参考答案	300
主要参考文献	327

第 1 章 函数的极限与连续

高等数学主要研究的对象是函数,研究的工具是极限理论.函数是现代数学的基本概念,连续是函数的一个重要性态.极限理论是微积分和级数知识的理论基础.本章将在复习和深化函数知识的基础上,进一步学习函数的极限、求极限的方法以及函数的连续性.

1.1 初等函数

1.1.1 函数的概念

1. 变量、区间与邻域

我们在观察各种自然现象或研究实际问题的时候,会遇到许多的量,这些量一般可分为两种:

常量:在观察过程中保持固定不变的量,通常用字母 a, b, c 等表示.

变量:在观察过程中可取不同数值的量,通常用字母 x, y, z 等表示.

例如把一个密闭容器内的气体加热时,气体的体积和气体的分子个数保持一定,它们是常量,而气体的温度和压力则是变量.

任何一个变量,总有一定的变化范围.如果变量的变化是连续的,常用区间来表示.区间是高等数学中常用的实数集,包括四种有限集和五种无限集,它们的名称、记号和定义如下:

闭区间	$[a, b] = \{x a \leq x \leq b\}$	
开区间	$(a, b) = \{x a < x < b\}$	
半开半闭区间	$(a, b] = \{x a < x \leq b\}$	$[a, b) = \{x a \leq x < b\}$
无限区间	$(a, +\infty) = \{x x > a\}$	$[a, +\infty) = \{x x \geq a\}$
	$(-\infty, b] = \{x x \leq b\}$	$(-\infty, b) = \{x x < b\}$
	$(-\infty, +\infty) = \{x x \in \mathbf{R}\}$	

其中 a, b 为确定的实数,分别称为区间的左端点和右端点.闭区间 $[a, b]$, 半开半闭区间 $[a, b)$ 及 $(a, b]$, 开区间 (a, b) 为有限区间.有限区间的左、右端点之间的距离 $b - a$ 称为区间长度. $+\infty$ 与 $-\infty$ 分别读作“正无穷大”与“负无穷大”,它们不表示任何数,仅仅是符号.

区间在数轴上的表示如图 1.1 表示.

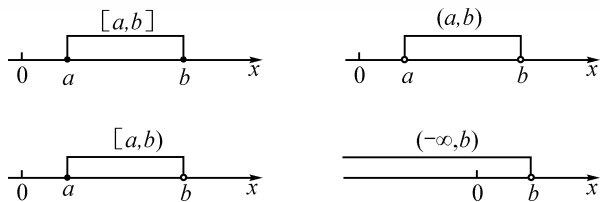


图 1.1

邻域是高等数学中经常用到的概念. 设 a 与 δ 是两个实数, 且 $\delta > 0$, 称实数集 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, a 称为该邻域的中心, δ 称为该邻域的半径. 由邻域的定义知

$$U(a, \delta) = (a - \delta, a + \delta)$$

表示分别以 $a - \delta, a + \delta$ 为左、右端点的开区间, 区间长度为 2δ , 如图 1.2(1) 所示.

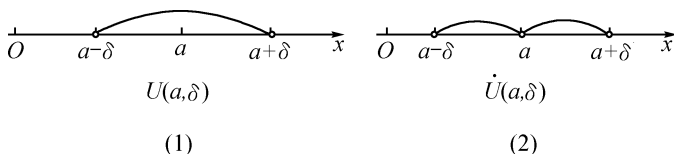


图 1.2

在 $U(a, \delta)$ 中去掉中心点 a 得到的实数集 $\{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域, 记作 $\dot{U}(a, \delta)$, 显然, 去心邻域 $\dot{U}(a, \delta)$ 是两个开区间 $(a - \delta, a)$ 和 $(a, a + \delta)$ 的并集, 即

$$\dot{U}(a, \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta), \text{ 见图 1.2(2).}$$

2. 函数的概念

在自然现象或生产过程中, 同时出现的某些变量之间往往存在着相互依赖、相互制约的关系, 这种关系在数学上称为函数关系.

定义 1.1 设 x 和 y 是某一变化过程中的两个变量, 如果 x 在实数的某一范围 D 内任意取一个数值, 变量 y 按照一定的对应法则 f , 都有唯一确定的实数值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作

$$y = f(x), x \in D,$$

称 x 为自变量, y 为因变量或函数, 自变量 x 的取值范围 D 叫做函数的定义域.

当自变量 x 取数值 $x_0 \in D$ 时, 与 x_0 对应的因变量 y 的值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 取遍 D 中的所有数值时与之对应的 y 值的集合 M 叫做这个函数的值域, 记为 $f(D)$, 即 $f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$.

在函数的定义中, 自变量 x 与因变量 y 的对应法则, 也可用其他字母 g, F, G, f_1 等表示. 如果两个函数的定义域相同, 并且对应法则也相同 (从而值域也相同), 那么它们不管用什么记号, 均表示同一个函数.

在实际问题中, 函数的定义域由实际意义确定. 例如, 正方形的面积 S 与边长 x 的关系是 $S = x^2$, 定义域为 $(0, +\infty)$. 在研究由公式表达的函数时, 我们规定: 函数的定义域就是使



函数表达式有意义的自变量的一切实数值所组成的集合. 例如, 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是 $(-1, 1)$, 函数 $y = \sin x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$.

例 1.1 设有函数 $f(x) = x - 1$ 和 $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$, 问它们是否为同一个函数?

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 而 $g(x)$ 在 $x = -1$ 点无定义, 其定义域为 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, 故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同, 从而它们不是同一个函数.

例 1.2 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{1}{x+1} + \sqrt{-x} + \sqrt{x+4}; \quad (2) \sqrt{16-x^2} + \lg \sin x.$$

解 (1) 要使函数 y 有意义, 必须 $\begin{cases} x+1 \neq 0, \\ -x \geq 0, \\ x+4 \geq 0 \end{cases}$ 成立, 即 $\begin{cases} x \neq -1, \\ x \leq 0, \\ x \geq -4. \end{cases}$

这个不等式组的解为 $-4 \leq x \leq 0$ 且 $x \neq -1$, 所以函数的定义域为 $[-4, -1) \cup (-1, 0]$.

(2) 要使函数 y 有意义, 必须 $\begin{cases} 16-x^2 \geq 0, \\ \sin x > 0 \end{cases}$ 成立,

即 $\begin{cases} -4 \leq x \leq 4, \\ 2n\pi < x < (2n+1)\pi \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{cases}$

这个不等式组的解为 $-4 \leq x < -\pi$ 或 $0 < x < \pi$, 所以函数的定义域为 $[-4, -\pi) \cup (0, \pi)$.

例 1.3 求函数 $f(x) = x^2 - 3x + 5$ 在 $x=3, x=x_0, x=x_0+h$ 各点的函数值.

解 $f(3) = 3^2 - 3 \times 3 + 5 = 5; \quad f(x_0) = x_0^2 - 3x_0 + 5;$

$$f(x_0+h) = (x_0+h)^2 - 3(x_0+h) + 5 = x_0^2 + (2h-3)x_0 + (h^2-3h+5).$$

3. 函数的表示方法

函数的表示方法通常有公式法(又称解析法)、列表法和图象法三种.

(1) 以数学式子表示函数的方法叫公式法, 如 $y = x^2, y = \cos x$, 公式法的优点是便于理论推导和计算.

(2) 以表格形式表示函数的方法叫列表法, 它是将自变量的值与对应的函数值列为表格, 如三角函数表、对数表等, 列表法的优点是所求的函数值容易查得.

(3) 以图形表示函数的方法叫图形法或图象法, 这种方法在工程技术上应用很普遍, 其优点是直观形象, 可看到函数的变化趋势.

4. 分段函数

在定义域的不同范围内, 用不同的解析式表示的函数称为分段函数.

例 1.4 旅客携带行李乘飞机时, 行李的重量不超过 20 千克时不收费, 若超过 20 千克, 每超过 1 千克收运费 a 元, 建立运费 y 与行李重量 x 的函数关系.

解 由题意知, 当 $0 \leq x \leq 20$ 时, 运费 $y = 0$; 而当 $x > 20$ 时, 只有超过的部分 $x - 20$ 按每



千克收运费 a 元, 此时 $y = a(x - 20)$. 于是函数 y 可以写成:

$$y = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 20, \\ a(x - 20), & x > 20. \end{cases}$$

这样便建立了行李重量 x 与行李运费 y 之间的函数关系.

例 1.5 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x-1, & x > 0. \end{cases}$ 求 $f(-3)$, $f(0)$, $f(2)$, 并作图.

解 $f(-3) = -3 + 1 = -2$, $f(0) = 0$, $f(2) = 2 - 1 = 1$. 图象如图 1.3 所示.

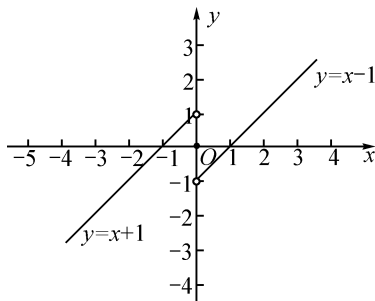


图 1.3

分段函数是公式法表达函数的一种方式, 在理论分析和实际应用都是很有用的. 需要注意的是: 分段函数是用几个公式合起来表示一个函数, 而不是表示几个函数. 分段函数的定义域是各个定义区间的并集.

5. 隐函数

由方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的函数称为**隐函数**, 例如 $xy = 1$, $e^x - 2\ln(xy) + 1 = 0$ 等. 相应地我们将前面讨论的函数 $y = f(x)$ 称为**显函数**.

有些隐函数可以表示成显函数的形式, 例如 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 确定了一个隐函数, 从中解出 y , 得 $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$, 就变成了显函数. 而有些隐函数却不可以, 如方程 $y + x - \ln y = 0$ 所确定的函数就无法表示成显函数.

1.1.2 函数的几种特性

1. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subseteq D$, 如果对于任意 $x_1, x_2 \in I$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上**单调增加** (如图 1.4 所示), 区间 I 称为函数 $y = f(x)$ 的一个单调增加区间; 当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上**单调减少** (如图 1.5 所示), 区间 I 称为函数 $y = f(x)$ 的一个单调减少区间.

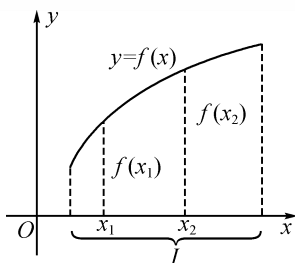


图 1.4

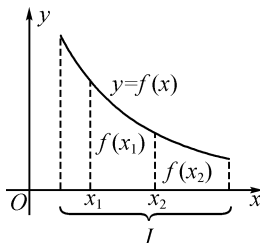


图 1.5

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**,所在的区间称为这个函数的**单调区间**.

例如:函数 $f(x) = x^2$ 在 $[0, +\infty)$ 上是单调增加的,在 $(-\infty, 0]$ 上是单调减少的,但在 $(-\infty, +\infty)$ 内不是单调函数(如图 1.6 所示).

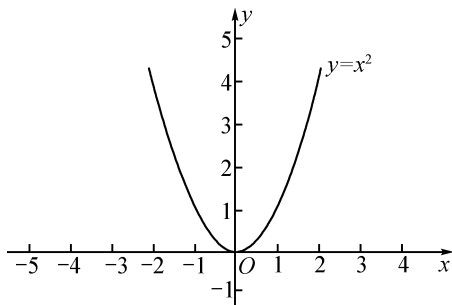


图 1.6

注意:函数的单调性是关于函数在区间上所讨论的一个概念,绝不能离开区间谈函数的单调性.

2. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subseteq D$, 如果存在某个正数 M , 对于任意的 $x \in X$, 都有不等式

$$|f(x)| \leq M$$

成立, 则称 $f(x)$ 在 X 上有界, 或称 $f(x)$ 是 X 上的**有界函数**. 如果这样的 M 不存在, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上**无界**, 或称 $f(x)$ 是 X 上的**无界函数**.

注意: (1) 当函数 $y=f(x)$ 在 X 上有界时, 正数 M 的取法不是唯一的. 例如 $y = \sin x$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上是有界的, 有 $|\sin x| \leq 1$, 但我们也可以取 $M = 2$, 即 $|\sin x| \leq 2$ 总是成立的, 实际上 M 可以取任何大于 1 的数.

(2) 函数的有界性, 不仅仅是要注意函数的特点, 还要注意自变量的变化范围 X . 例如, 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在区间 $(1, 2)$ 内是有界的, 但在区间 $(0, 1)$ 内是无界的.

3. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 即当 $x \in D$ 时, 有 $-x \in D$. 如果对于任意的 $x \in D$, 都有 $f(-x) = f(x)$ 成立, 则称 $f(x)$ 为**偶函数**; 如果对于任意的 $x \in D$, 都有



$f(-x) = -f(x)$ 成立, 则称 $f(x)$ 为奇函数. 如果 $f(x)$ 既不是奇函数, 也不是偶函数, 则称 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

如 $y = x^2$ 与 $y = \cos x$ 都是偶函数, $y = x^3$ 与 $y = \sin x$ 都是奇函数, 而 $y = \sin x + \cos x$ 是非奇非偶函数.

在几何上, 偶函数的图象关于 y 轴对称, 奇函数的图象关于原点对称.

例 1.6 判断函数 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的奇偶性.

解 因为函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{1+(-x)^2}) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) \\ &= \ln \frac{(-x + \sqrt{1+x^2})(x + \sqrt{1+x^2})}{x + \sqrt{1+x^2}} = \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \\ &= -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x). \end{aligned}$$

所以, $f(x)$ 是奇函数.

4. 周期性

设函数 $y = f(x)$, $x \in D$. 如果存在某一非零常数 T , 使得对于任意 $x \in D$, 均有 $x \pm T \in D$, 且有 $f(x+T) = f(x)$ 成立, 则称函数 $y = f(x)$ 为周期函数, 称 T 为该函数的周期. 通常我们说的周期函数的周期都是指的最小正周期.

如函数 $y = \sin x$ 及 $y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数, 函数 $y = \tan x$ 及 $y = \cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数.

在几何上, 周期为 T 的周期函数的图象在长度为 T 的相邻区间上形状相同.

例 1.7 求函数 $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ 的周期, 其中 A, ω, φ 为常数.

解 设所求的周期为 T , 由于

$$f(t+T) = A \sin[\omega(t+T) + \varphi] = A \sin[(\omega t + \varphi) + \omega T],$$

要使

$$f(t+T) = f(t),$$

即

$$A \sin[(\omega t + \varphi) + \omega T] = A \sin(\omega t + \varphi)$$

成立, 因为 $\sin t$ 的周期为 2π , 只需

$$\omega T = 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

使上式成立的最小正数为 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (取 $n = 1$), 所以函数 $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ 的周期是 $\frac{2\pi}{\omega}$.

1.1.3 反函数、复合函数和初等函数

1. 反函数

函数关系的实质就是从定量分析的角度来描述运动过程中变量之间的相互依赖关系. 但在研究过程中, 哪个量作为自变量, 哪个量作为因变量(函数)是由具体问题来决定的.



设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W . 对于值域 W 中的任一数值 y , 在定义域 D 上至少可以确定一个数值 x 与 y 对应, 且满足关系式

$$f(x) = y.$$

如果把 y 作为自变量, x 作为因变量, 则由上述关系式可确定一个新函数 $x=\varphi(y)$ (或 $x=f^{-1}(y)$). 这个新函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**. 反函数的定义域为 W , 值域为 D . 相对于反函数, 函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

由于习惯上采用字母 x 表示自变量, y 表示函数. 因此, 将 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 换成 y , y 换成 x , $y=f(x)$ 的反函数即为 $y=f^{-1}(x)$.

注意: (1) 函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 是表示同一个函数.

(2) 求反函数的过程可分为两步: 第一步, 从 $y=f(x)$ 中解出 $x=f^{-1}(y)$; 第二步交换字母 x 和 y .

例 1.8 求函数 $y=10^{x+1}$ 的反函数.

解 由 $y=10^{x+1}$ 解出 $x=\lg y-1$, 然后交换 x 和 y , 得

$$y=\lg x-1,$$

即 $y=\lg x-1$ 是函数 $y=10^{x+1}$ 的反函数.

2. 基本初等函数

在大量的函数关系中, 有几种函数是最常见的、最基本的. 它们是常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数. 这几类函数称为**基本初等函数**. 下面分别介绍它们的定义、图像和性质.

(1) 常值函数 $y=C$ (C 为任意常数)

由于常值函数在定义域内每一点处所对应的函数值都相等, 所以其图象是平行于 x 轴且截距为 C 的直线.

(2) 幂函数 $y=x^u$ (u 为任意实数)

幂函数 $y=x^u$ ($u \in \mathbf{R}$) 随着 u 的取值不同, 其定义域、值域、图像和性质也不尽相同. 当 $u > 0$ 时, 如图 1.7 所示, $y=x^u$ 的定义域包含区间 $[0, +\infty)$, 图象都过 $(0,0)$, $(1,1)$ 点, 在 $(0, +\infty)$ 内, $y=x^u$ 是严格单调增加的; 当 $u < 0$ 时, 如图 1.8 所示, $y=x^u$ 的定义域包含区间 $(0, +\infty)$, 图象都过 $(1,1)$ 点, 在 $(0, +\infty)$ 内, $y=x^u$ 是严格单调减少的.

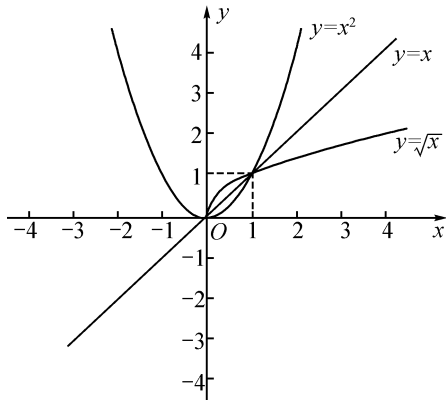


图 1.7

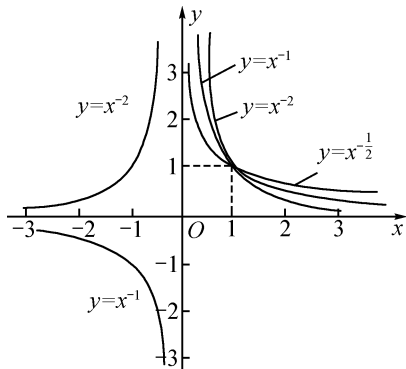


图 1.8



(3) 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)

指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$, 图象都过 $(0, 1)$ 点, 当 $a > 1$ 时, 它单调增加; 当 $0 < a < 1$ 时, 它单调减少 (如图 1.9 所示).

(4) 对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$)

对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 是指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的反函数, 它的定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 图象都过 $(1, 0)$ 点; 当 $a > 1$ 时, 它单调增加, 当 $0 < a < 1$ 时, 它单调减少 (如图 1.10 所示).

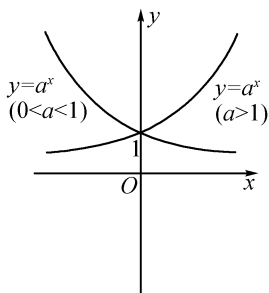


图 1.9

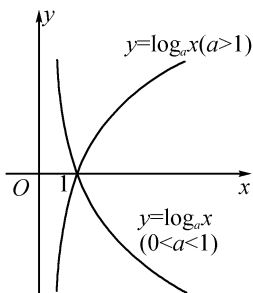


图 1.10

(5) 三角函数

常用的三角函数有正弦函数 $y = \sin x$, 余弦函数 $y = \cos x$, 正切函数 $y = \tan x$, 余切函数 $y = \cot x$.

$y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 的定义域均为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$. 它们都是以 2π 为周期的周期函数, 都是有界函数, 正弦函数是奇函数, 余弦函数是偶函数. 如图 1.11 及图 1.12 所示.

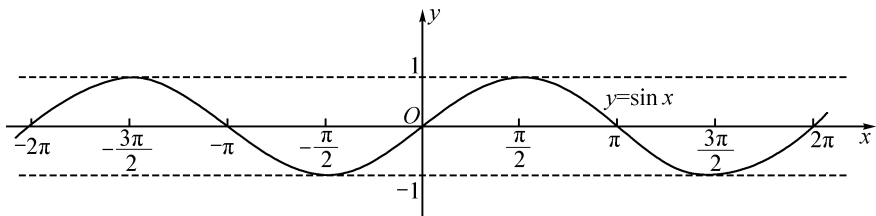


图 1.11

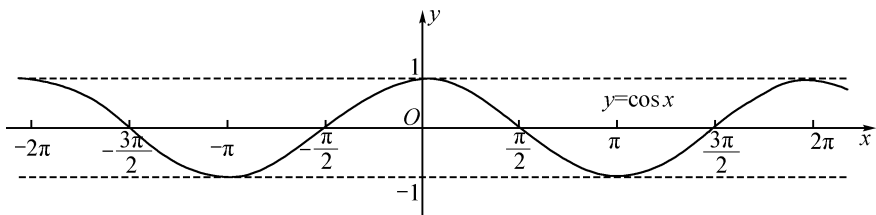


图 1.12

$y = \tan x$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, 值域是 $(-\infty, +\infty)$. 它是奇函数, 是以 π 为

周期的周期函数. 如图 1.13 所示.



$y = \cot x$ 的定义域是 $\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$, 值域是 $(-\infty, +\infty)$. 它是奇函数, 是以 π 为周期的周期函数. 如图 1.14 所示.

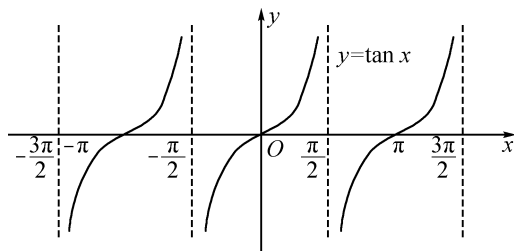


图 1.13

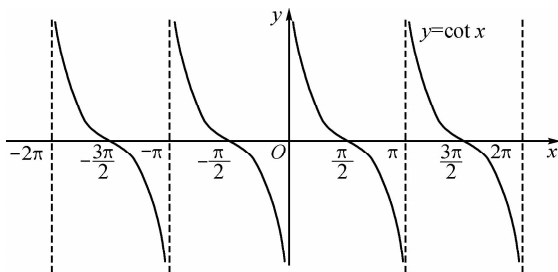


图 1.14

三角函数还包括正割函数 $y = \sec x$ 和余割函数 $y = \csc x$, 它们都是以 2π 为周期的周期函数.

(6) 反三角函数

三角函数 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ 和 $y = \cot x$ 的反函数都是多值函数, 我们按下列区间取其一个单值分支, 称为主值分支, 分别记作

反正弦函数 $y = \arcsin x$, 定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 图象如图 1.15 所示.

反余弦函数 $y = \arccos x$, 定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \pi]$, 图象如图 1.16 所示.

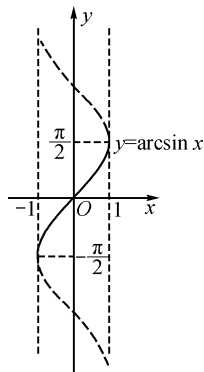


图 1.15

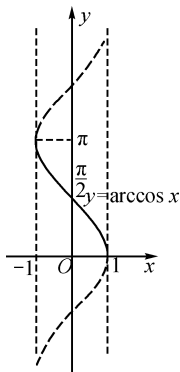


图 1.16

反正切函数 $y = \arctan x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 图象如图 1.17 所



示.

反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, \pi)$, 图象如图 1.18 所示.

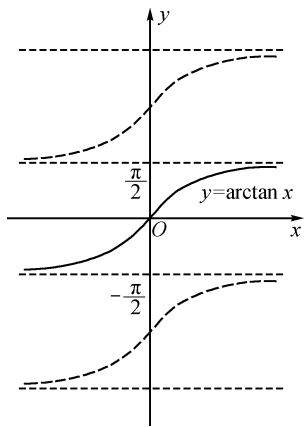


图 1.17

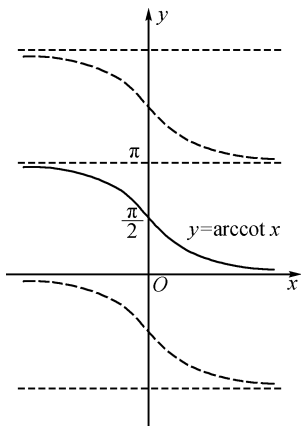


图 1.18

3. 复合函数

定义 1.2 设有函数 $y = f(u)$, $u \in U$ 和函数 $u = \varphi(x)$, $x \in D$, 且函数 $\varphi(x)$ 的值域的全部或部分包含在函数 $f(u)$ 的定义域内, 那么 y 通过 u 的联系成为 x 的函数. 我们把 y 叫做 x 的复合函数. 记作

$$y = f[\varphi(x)],$$

其中 x 为自变量, y 为因变量, u 为中间变量.

注意: (1) 不是任何两个函数都可以组成一个复合函数的. 例如, $y = \arcsin u$ 及 $u = 2 + x^2$ 就不能组成复合函数. 原因是 $u = 2 + x^2$ 的值域 $[2, +\infty)$ 和 $y = \arcsin u$ 的定义域 $[-1, 1]$ 的交集是空集.

(2) 复合函数也可以由两个以上的函数复合而成.

例 1.9 求由下列函数组成的复合函数:

(1) $y = \sqrt{u}$, $u = \cot x$; (2) $y = u^2$, $u = \ln v$ 和 $v = 1 + x^2$.

解 (1) $y = \sqrt{u}$, $u = \cot x$ 的复合函数是 $y = \sqrt{\cot x}$.

(2) $y = u^2$, $u = \ln v$ 和 $v = 1 + x^2$ 的复合函数是 $y = \ln^2(1 + x^2)$.

例 1.10 指出下列复合函数的复合过程:

(1) $y = e^{\arcsin x}$; (2) $y = 2 \sin \sqrt{1 - x^2}$.

解 (1) 函数 $y = e^{\arcsin x}$ 是由 $y = e^u$, $u = \arcsin x$ 复合而成的.

(2) 函数 $y = 2 \sin \sqrt{1 - x^2}$ 是由 $y = 2 \sin u$, $u = \sqrt{v}$, $v = 1 - x^2$ 复合而成的.

4. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算所构成的能用一个解析式表示的函数, 称为初等函数.



例如, 函数 $y = e^{\sin x^2}$, $y = \frac{\tan x}{x} + \arccos x$, $y = \sqrt{\frac{\ln(x^2+1) + \cos^2 x}{\sqrt{x-1} + \sqrt[5]{x}}}$ 等都是初等函数. 但

$y = 1 + x + x^2 + \cdots$ 不是初等函数 (不满足有限次运算), $y = \begin{cases} 2^x, & (x \geq 0), \\ x^2, & (x < 0) \end{cases}$ 也不是初等函数

(不能由一个解析式表示).

习题 1.1

1. 用区间表示下列范围:

(1) $x \leq 0$; (2) $-1 \leq x < 2$; (3) $|x - 2| < \varepsilon$; (4) $U(a, \delta)$.

2. 求下列函数的定义域:

$$(1) y = \frac{2}{x^2 - 3x + 2}; \quad (2) y = \lg \frac{1+x}{1-x};$$

$$(3) y = \sqrt{2+x} + \frac{1}{\lg(1-x)}.$$

3. 求下列函数值:

$$(1) \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} 2^x, & -1 < x < 0, \\ 2, & 0 \leq x < 1, \\ x^2 + 1, & 1 \leq x \leq 3, \end{cases} \text{ 求 } f(3), f(2), f(0), f(0.5), f(-0.5).$$

$$(2) \text{ 设 } f(x) = \frac{x}{1-x}, \text{ 求 } f(0), f(x+1), f[f(x)].$$

4. 下列各对函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同, 并说明理由.

$$(1) f(x) = |x| \text{ 与 } g(x) = \sqrt{x^2}; \quad (2) f(x) = \lg x^2 \text{ 与 } g(x) = 2 \lg x.$$

5. 讨论函数 $f(x) = 2x + \ln x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的单调性.

6. 判断下列函数的奇偶性:

$$(1) f(x) = x + \cos x; \quad (2) f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$(3) f(x) = x \cos x; \quad (4) f(x) = x(x-2)(x+2).$$

7. 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数, 指出其周期:

$$(1) f(x) = \cos(x-1) \quad (2) f(x) = \sin^2 x.$$

8. 下列函数由哪些简单函数复合而成:

$$(1) y = \ln \sqrt{1-x}; \quad (2) y = \arcsin 2^x;$$

$$(3) y = 2^{\sqrt[3]{x^2+1}}; \quad (4) y = \sin^2[\tan(1+x^2)].$$

1.2 极限

极限是描述变量在某个变化过程中的变化趋势. 其思想可以追溯到我国古代的哲学家



庄周所著《庄子·天下》记载的这样一句话：“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”意思是说将一尺长的木杖，每日取一半，虽经万世也取不尽，如果把每日取剩部分写成数列，则有

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

即当天数愈来愈多时，所剩下的木杖长也就越来越小，用数学语言来叙述，即当 n 越来越大时，数列 $\{\frac{1}{2^n}\}$ 的项愈来愈趋近零。它表明了数列的一种变化状态。

1.2.1 数列的极限

1. 数列的概念

在正整数集合上的函数 $x_n = f(n)$ ($n = 1, 2, \dots$)，其函数值按自变量 n 由小到大的次序排成一列数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ 称为**数列**，记作 $\{x_n\}$ ，其中 x_n 称为数列的**通项**（一般项）。

下面考察下列数列，当 n 无限增大时，通项 x_n 的变化趋势

$$(1) 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots; \quad (2) 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots;$$

$$(3) 0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \dots; \quad (4) 2, 4, 6, 8, \dots \quad (5) 1, 0, 1, 0, \dots.$$

分析：(1) 通项 $x_n = \frac{n+1}{n}$ ，当 n 无限增大时， x_n 无限趋近于一个定值 1；

(2) 通项 $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ，当 n 无限增大时， x_n 无限趋近于一个定值 0；

(3) 通项 $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ ，当 n 无限增大时， x_n 无限趋近于一个定值 1；

(4) 通项 $x_n = 2n$ ，当 n 无限增大时， x_n 无限增大，不趋于某个定值；

(5) 通项 $x_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}$ ，当 n 无限增大时， x_n 始终在 1 和 0 两个数上摆动，不趋于某个定值。

观察以上数列我们不难发现，有些数列在它的变化过程中，随着 n 的不断增大， x_n 将无限趋近于某个确定的数，如(1)、(2)、(3)，但(4)、(5)就没有这一特征。

当 n 无限增大时，对应的 x_n 是否能无限地趋近于某个确定的值，数学上通常用极限和发散来描述这种现象。

2. 数列的极限

定义 1.3 如果数列 $\{x_n\}$ 的项数 n 无限增大时， x_n 无限趋近于某个固定的常数 A ，则称 A 是当 n 趋于无穷大时数列 $\{x_n\}$ 的**极限**，记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A \quad \text{或} \quad x_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty),$$

读作“当 n 趋于无穷大时， x_n 的极限为 A ”。



这时,也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A ,如果 n 无限增大时, x_n 不能无限趋近于某个固定的常数,则称当 $n \rightarrow \infty$ 时,数列 $\{x_n\}$ 发散.

由定义 1.3 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} [1 + \frac{(-1)^n}{n}] = 1$, 而数列 $\{2n\}$, $\{\frac{1+(-1)^n}{2}\}$ 都发散.

上面定义 1.3 给出的数列极限定义是在运动变化观点的基础上,凭借几何直观用普通语言作出的定性描述. 对于变量 x_n 的变化过程(n 无限增大)以及 x_n 的变化趋势(无限趋近于常数 A)都借助于形容词“无限”加以修饰. 它只是形象描述,而不是定量描述,为了在数学中进行严谨的论证,我们给出数列极限的定量描述.

定义 1.4 (极限的“ ε - N ”语言) 设有数列 $\{x_n\}$, 如果存在常数 A , 使对任意给定的正数 ε (不论它多么小), 总存在正整数 N , 只要 $n > N$, 所对应的 x_n 都满足不等式 $|x_n - A| < \varepsilon$, 则称常数 A 是数列 $\{x_n\}$ 的极限. 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A, \text{ 或当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } x_n \rightarrow A.$$

例 1.11 用定义验证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = 2.$$

证 对于任意给定的正数 ε , 欲使 $\left| \frac{2n-1}{n} - 2 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$,

只需

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ 即 } n > \frac{1}{\varepsilon},$$

取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}]$ (其中 $[\frac{1}{\varepsilon}]$ 表示小于或等于 $\frac{1}{\varepsilon}$ 的最大整数), 则当 $n > N$ 时, 恒有 $\left| \frac{2n-1}{n} - 2 \right| < \varepsilon$

成立, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = 2$.

例 1.12 用定义验证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1).$$

证 当 $q = 0$ 时, 等式显然成立.

当 $0 < |q| < 1$ 时, 对于任意给定的正数 ε (不妨设 $\varepsilon < 1$). 欲使不等式

$$|q^n - 0| = |q|^n < \varepsilon$$

成立, 只需 $n \ln |q| < \ln \varepsilon$, 即 $n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}$ ($\ln |q| < 0$, 取 $\varepsilon < |q|$). 取正整数 $N = [\frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}]$, 则当 $n >$

N 时, 都有 $|q^n - 0| < \varepsilon$ 成立, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0 \quad (|q| < 1)$.

注意: (1) 证明数列 $\{a_n\}$ 以常数 a 为极限的过程, 实际上是对任意给定的正数 ε (不论其多么小), 寻找正整数 N 的过程.

(2) 用定义只能验证某常数是不是数列 $\{a_n\}$ 的极限, 一般不能用定义求出极限.



若数列 $\{x_n\}$ 对于每一个正整数 n , 都有 $x_n \leq x_{n+1}$, 则称 $\{x_n\}$ 是单调递增数列;
同理, 若都有 $x_n \geq x_{n+1}$, 则称数列 $\{x_n\}$ 是单调递减数列. 对于单调有界数列有下列定理.
定理 1.1 单调有界数列必有极限.

1.2.2 函数的极限

数列是自变量取正整数的一种特殊函数, 下面讨论一般函数的极限, 由于自变量的变化过程不同, 函数极限的概念就表现为不同情形.

1. 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限

自变量 x 趋向无穷大, 可以分为三种情形:

(1) $x \rightarrow +\infty$, 它表示 x 趋向于正无穷大, 即 x 无限增大的过程;

(2) $x \rightarrow -\infty$, 它表示 x 趋向于负无穷大, 即 $x < 0$, 且 $|x|$ 无限增大的过程;

(3) $x \rightarrow \infty$, 它表示 x 趋向于无穷大, 即 $|x|$ 无限增大的过程.

首先考察函数 $y = f(x) = \frac{1}{x}$, 当 $|x|$ 无限增大时, 函数的变化趋势, 从表 1.1 及图 1.19 可看出, 当自变量 x 取正值无限增大时或 x 取负值而绝对值无限增大时, 函数曲线愈来愈接近 x 轴, 其函数值无限趋于零, 很自然我们就说函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时以 0 为极限.

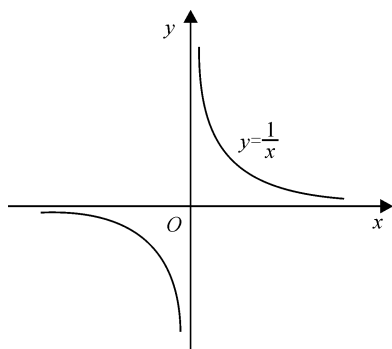


图 1.19

表 1.1

x	± 1	± 100	± 1000	± 100000	$\dots$
$f(x)$	± 1	± 0.01	± 0.001	± 0.00001	$\dots$

一般地, 有如下定义:

定义 1.5 设函数 $y = f(x)$, 如果当 x 的绝对值无限增大时, 函数 $f(x)$ 无限趋近于一个固定的常数 A , 则称 A 是当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限, 记作:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A.$$

按定义 1.5, 上例可记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

有时为了区别起见, 我们将 x 总取正值而无限增大记为 $x \rightarrow +\infty$, 将 x 总取负值其绝对值无限增大记为 $x \rightarrow -\infty$.

讨论函数 $y = \arctan x$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 与 $x \rightarrow -\infty$ 时的变化趋势.

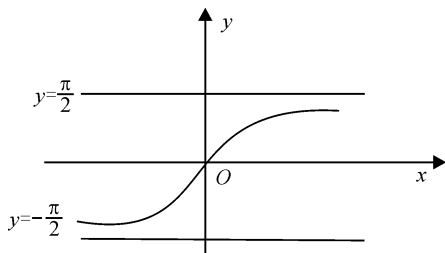


图 1.20



由图 1.20 可看出, 当 $x \rightarrow +\infty$, $\arctan x$ 无限趋于 $\frac{\pi}{2}$; 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\arctan x$ 无限趋于 $-\frac{\pi}{2}$, 即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

定义 1.6 设函数 $f(x)$ 在 $|x| \geq b > 0$ 上有定义, A 为一个常数, 若对于任意给定的正数 ε , 总存在正数 X , 使得当 $|x| > X$ 时, 都有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A \quad (x \rightarrow \infty).$$

在 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的定义中, 将 $|x| > X$, 换成 $x > X$ 可以得到 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 的定义; 若将 $|x| > X$, 换成 $x < -X$ 可以得到 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ 的定义.

根据函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的极限和在 $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ 时极限的定义容易推出下面的定理:

定理 1.2 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 则称直线 $y = A$ 是曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线.

例 1.13 用定义证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1$.

证 对于任意给定的正数 ε , 欲使

$$\left| \frac{x^2}{x^2 + 1} - 1 \right| = \frac{1}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{x^2} < \varepsilon,$$

只需 $x^2 > \frac{1}{\varepsilon}$, 即 $|x| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, 于是取 $X = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, 当 $|x| > X$ 时, 有

$$\left| \frac{x^2}{x^2 + 1} - 1 \right| < \varepsilon$$

成立, 从而证明了

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = 1.$$

由此可知, 直线 $y = 1$ 是曲线 $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ 的水平渐近线.

例 1.14 讨论当 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数 $f(x) = \arctan x$ 的极限.

解 如图 1.20 所示, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ 和

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$ 虽然都存在, 但它们不相等, 所以 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x$ 不存在.



2. 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

首先考察函数 $y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, ($x \neq 1$). 当 x 无限趋于 1 时, 函数的变化趋势从表 1.2 及图 1.21 可看出, 当自变量 x 无论是从大于 1 还是从小于 1 方向无限趋于 1 ($x \neq 1$) 时, 对应的函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 无限趋近于 2, 很自然我们就说函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 当 $x \rightarrow 1$ 时以 2 为极限.

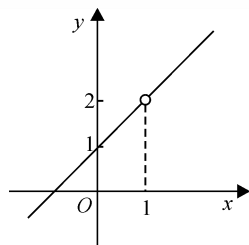


图 1.21

表 1.2

x	0.5	0.75	0.9	0.99	0.9999	...	1.000001	1.03	1.25	1.5
$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$	1.5	1.75	1.9	1.99	1.9999	...	2.000001	2.03	2.25	2.5

一般地, 有如下定义.

定义 1.7 设函数 $y = f(x)$, 如果当 x 无限趋近于定值 x_0 ($x \neq x_0$) 时, 函数 $f(x)$ 无限趋近于一个固定的常数 A , 则称 A 是当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

由定义 1.7 知, 函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ($x \neq 1$) 当 $x \rightarrow 1$ 时的极限可记为 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

定义中“ $x \rightarrow x_0$ 且 $x \neq x_0$ ”的意义在于, 我们研究的是当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的变化趋势, 因此与 $f(x)$ 在 x_0 点有无定义无关. 如函数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 在 $x = 1$ 无定义, 但这并不影响我们研究当 $x \rightarrow 1$ 时 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的变化趋势.

定义 1.7 与定义 1.5 类似, 可给出极限的“ ε - δ ”语言进行定量描述, 并用它可证明

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} C = C, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

定义 1.8 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义, A 为常数. 如果对于任意给定的正数 ε , 总存在正数 δ , 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时以 A 为极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0).$$

此定义的几何意义是: 对于任意给定的正数 ε , 无论其多么小, 总存在点 x_0 的一个去心邻域 $0 < |x - x_0| < \delta$, 使得函数 $y = f(x)$ 在这个去心邻域内的图形介于两条平行直线 $y = A - \varepsilon$ 和 $y = A + \varepsilon$ 之间, 如图 1.22 所示.

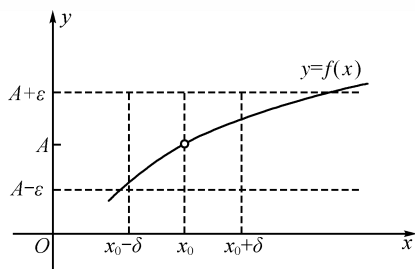


图 1.22

例 1.15 用定义证明: $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ (c 为常数).

证 对任意给定的正数 ε , 取 $\delta = 1$ (此题的 δ 可取任一正数). 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 总有 $|c - c| < \varepsilon$, 从而 $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$.

在 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的定义中, x 可以以任意方式趋于 x_0 . 有时, 为了讨论问题的需要, 可以只考虑 x 从 x_0 的某一侧 (左侧或右侧) 趋向于 x_0 时 $f(x)$ 的变化趋势, 这就引出了左极限和右极限的概念.

3. 函数的右极限和左极限

定义 1.9 设函数 $f(x)$ 在 (x_0, b) 内有定义, A 为常数. 如果对于任意给定的正数 ε , 总存在正数 δ , 使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 恒有不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处的**右极限**为 A . 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0 + 0) = A.$$

若函数 $f(x)$ 在 (a, x_0) 内有定义, A 为常数. 如果对于任意给定的正数 ε , 总存在正数 δ , 使得当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时, 恒有不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处的**左极限**为 A . 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0 - 0) = A.$$

根据 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限定义及左、右极限的定义, 可以得到下面的定理:

定理 1.3 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

定理 1.3 为我们提供了讨论分段函数在分段点处是否存在极限的方法.

例 1.16 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x+1, & x > 0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左、右极限, 并判断当 $x \rightarrow 0$ 时,

$f(x)$ 的极限是否存在.

解 如图 1.23 所示. $\because \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1) = -1$,
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1$,



即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的左极限为 -1 , 右极限为 1 , $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$\therefore$ 由定理 1.3 可知, 当 $x \rightarrow 0$ 时函数 $f(x)$ 的极限不存在.

例 1.17 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1, \\ 2x, & x \geq 1, \end{cases}$$

讨论当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限是否存在.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2$, 即

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2.$$

所以, 由定理 1.3 可知极限 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

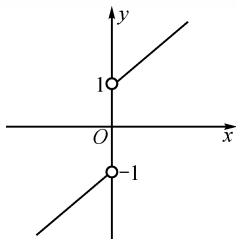


图 1.23

1.2.3 无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量

(1) 定义 1.10 极限为零的变量称为无穷小量. 简称为无穷小, 常用符号 α, β, γ 等表示.

例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x^2, \sin x, \tan x$ 都趋近于零, 因此当 $x \rightarrow 0$ 时, 这些变量都是无穷小量; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{x}, \frac{1}{2^x}, \frac{1}{\ln x}$ 都趋近于零, 因此当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 这些变量都是无穷小量.

注意: ①无穷小量不是一个很小的数, 因此任意的非零常数 c , 不论它的绝对值多么小, 都不是无穷小量, 常数 0 是唯一的可以作为无穷小量的常数.

②某个变量是否是无穷小量与自变量的变化过程有关. 例如, 函数 $f(x) = 2x - 1$ 是 $x \rightarrow \frac{1}{2}$ 时的无穷小量, 而不是 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小量.

(2) 无穷小量的性质

性质 1 有限个无穷小量的和、差、积仍然是无穷小量.

性质 2 有界函数与无穷小量的乘积为无穷小量.

例 1.18 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.

解 因为 $\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \sin x$, 而 $\frac{1}{x}$ 是 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小, $\sin x$ 是有界函数 ($|\sin x| \leq 1$).

所以根据无穷小的性质 2 知, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

例 1.19 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}$.

解 因为 $\frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{e^x + e^{-x}} \cdot \cos x$,



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = 0.$$

即当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{e^x + e^{-x}}$ 为无穷小, $\cos x$ 是有界函数 ($|\cos x| \leq 1$). 所以根据无穷小量的性质

$$2 \text{ 知, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} = 0.$$

(3) 函数极限与无穷小量的关系

定理 1.4 在自变量的某个变化过程中, 函数 $f(x)$ 的极限为 A 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha(x)$, 其中 α 为这个变化过程中的无穷小量 (即 $\lim \alpha = 0$).

常称这个定理为**极限的基本定理**, 它有相当广泛的应用.

2. 无穷大量

定义 1.11 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果对于任意给定的正数 M , 都存在正数 δ , 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 恒有不等式

$$|f(x)| > M$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时为**无穷大量**. 简称无穷大, 并记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

注意: (1) 函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ 时为无穷大量, 按极限的定义来说, 它的极限是不存在的, 为了便于叙述函数的这一性态和书写方便, 我们用记号 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 来表示 $f(x)$ 是无穷大, 同时表明当 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 虽无极限, 但还是有明确趋向的;

(2) 无穷大量是一个绝对值可无限增大的变量, 不是绝对值很大的一个数.

如果将定义中 $|f(x)| > M$ 改成 $f(x) > M$ (或 $f(x) < -M$), 则称函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 时为**正无穷大量** (或**负无穷大量**), 并记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad (\text{或 } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty).$$

定义中的 $x \rightarrow x_0$ 可换成 $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 等.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则称直线 $x = x_0$ 是曲线 $y = f(x)$ 的**垂直渐近线**. (如图 1.24 所示)

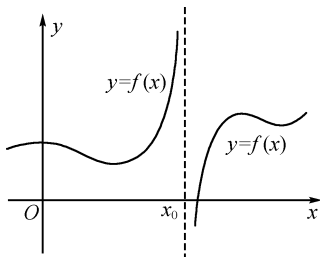


图 1.24

例 1.20 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.



证 对于任意给定的正数 ε , 欲使 $\left| \frac{1}{x-1} \right| > M$, 只需 $|x-1| < \frac{1}{M}$, 因此取 $\delta = \frac{1}{M}$,

则当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{1}{x-1} \right| > \frac{1}{\delta} = M,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty.$$

直线 $x=1$ 是曲线 $y = \frac{1}{x-1}$ 的垂直渐近线.

3. 无穷小与无穷大的关系

从无穷小量与无穷大量的定义, 可以看出它们之间有着密切的关系, 体现为下列定理.

定理 1.5 在同一变化过程中, 无穷大的倒数为无穷小; 恒不等于零的无穷小的倒数为无穷大.

例如, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 2^x 为无穷大, 所以 $\frac{1}{2^x}$ 为无穷小; 当 $x \rightarrow 1$ 时, $x-1$ 为非零无穷小, 所以 $\frac{1}{x-1}$ 为无穷大. 根据该定理, 我们可以把对无穷大的研究转化为对无穷小的研究, 而无穷小的分析正是微积分学中的精髓.

4. 无穷小的比较

由无穷小的性质我们知道, 两个无穷小的和、差、积仍是无穷小, 但是两个无穷小的商却不一定是无穷小. 请看下面的例子. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x, x^2, 2x, x^3$ 都是无穷小, 可是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} = 2, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^3} = \infty.$$

两个无穷小之比的极限不同, 反映了无穷小趋于零的速度不同. 为了比较无穷小趋于零的速度, 我们引入无穷小量的比较的概念.

定义 1.12 设 $\alpha = \alpha(x), \beta = \beta(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ (或 $x \rightarrow \infty$) 时为无穷小量 ($\alpha \neq 0$).

(1) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$.

(2) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$, 则称 β 是比 α 低阶的无穷小.

(3) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c (c \neq 0 \text{ 的常数})$, 则称 β 与 α 是同阶无穷小. 特别地, 当 $c=1$ 时, 称 β 与 α 是等价无穷小, 记为 $\alpha \sim \beta$.

例 1.21 比较下列函数的阶:

(1) x^3 与 x ; (2) $x^2 - 1$ 与 $x - 1$; (3) $\sin x$ 与 $\tan x$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = 0$, 所以当 $x \rightarrow 0$ 时, x^3 是 x 的高阶无穷小;