

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学:工科类/杨勇,杨德山主编. —
上海:华东师范大学出版社,2016
ISBN 978-7-5675-6046-8

I. ①应… II. ①杨… ②杨… III. ①高等数学—高等职业教育—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 007033 号

应用高等数学(工科类)

主 编 杨 勇 杨德山
项目编辑 皮瑞光
特约审读 芮德静
装帧设计 创图文化

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮 编 200062
网 址 www.ecnupress.com.cn
电 话 021-60821666 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537(兼传真) 门市(邮购)电话 021-62869887
门市地址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 店 <http://hdsdcbs.tmall.com>

印 刷 者 成都市海翔印务有限公司
开 本 787×1092 16 开
印 张 14
字 数 323 千字
版 次 2016 年 12 月第 1 版
印 次 2016 年 12 月第 1 次
书 号 ISBN 978-7-5675-6046-8/O · 276
定 价 38.00 元

出 版 人 王 焰

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社市场部调换联系)

目 录

项目 1 空间解析几何	1
任务 1 空间直角坐标系	8
任务 2 向量的坐标	13
任务 3 平面方程与空间直线方程	19
项目小结	25
项目 2 复数及函数	29
任务 1 复数和复平面	29
任务 2 函数的概念与性质	36
任务 3 极限的概念及运算	42
任务 4 无穷小量与无穷大量	50
项目小结	55
项目 3 一元函数微分学	57
任务 1 求导法则	57
任务 2 微分	65
任务 3 原函数与不定积分	69
任务 4 换元积分法	73
任务 5 分部积分法	80
项目小结	84
项目 4 定积分及其应用	87
任务 1 定积分的概念与性质	87
任务 2 微积分学的基本定理与基本公式	93
任务 3 定积分的换元积分法与分部积分法	96
任务 4 定积分的应用	100
项目小结	108



项目 5 多元函数的微分和积分	111
任务 1 偏导数	111
任务 2 全微分	116
任务 3 二重积分	119
项目小结	126
项目 6 常微分方程	130
任务 1 一阶微分方程的解法	130
任务 2 二阶常系数微分方程的解法	137
项目小结	144
项目 7 无穷级数	146
任务 1 常数项级数	146
任务 2 幂级数	156
任务 3 函数展成幂级数	162
任务 4 傅立叶级数	168
项目小结	176
项目 8 拉普拉斯变换	181
任务 1 拉普拉斯变换的基本概念	181
任务 2 拉氏变换的性质	186
任务 3 拉氏逆变换的性质	189
项目小结	190
项目 9 线性代数初步	192
任务 1 矩阵的概念及矩阵的运算	192
任务 2 线性方程组	201
项目小结	206
参考答案	209

项目 1

空间解析几何

解析几何的基本思想就是用代数的方法来研究空间中的几何问题. 本项目里我们首先介绍空间解析几何部分, 在此基础上, 再研究多元函数微积分的有关内容.



本项目在专业课中的应用

- 建筑力学中力的合成与分解
- 离地悬空 7~8m 的高支模
- 支座处受力的安全性
- 桥式起重机大梁



补充内容: 行列式的计算

在初等代数中, 用加减消元法求解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. (2) \end{cases}$$

由 $(1) \times a_{22} - (2) \times a_{12}$ 可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

由 $(2) \times a_{11} - (1) \times a_{21}$ 可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

如果未知量 x_1, x_2 的系数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, 则该线性方程组的解为:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

这极不便于记忆, 为此引入二阶行列式的概念.



一、行列式的定义

定义 1 符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二阶行列式,它代表 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 这个算式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

它由两行两列的 2^2 个元素组成,其中 a_{ij} ($i=1,2; j=1,2$) 称为这个行列式的元素, i 代表 a_{ij} 所在的行数,称为行标; j 代表 a_{ij} 所在的列数,称为列标. 如 a_{12} 表示这一元素处在第 1 行第 2 列的位置.

类似地,也可以得到三阶行列式的概念.

定义 2 符号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为三阶行列式,它代表 $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$

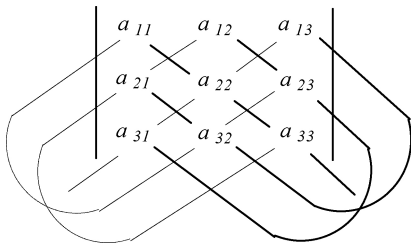
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \text{ 这一算式,即 } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

它由三行三列的 3^2 个元素组成,其中从左上角到右下角这条对角线称为主对角线,从右上角到左下角这条对角线称为次对角线(或副对角线).

由此可以看出,对于二阶行列式的值,恰好为主对角线上两元素之积减去次对角线上两元素之积.

三阶行列式的计算如下图所示,粗线上的 3 个数相乘取正,虚线上的 3 个数相乘取负,共 6 项,其代数和即为行列式的值.



这种计算方法称为对角线法则,但是,我们要注意该种方法只对二阶、三阶行列式有效,对于高阶行列式的展开,待学完行列式的性质后再作讨论.

例 1 计算行列式.

$$(1) \begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & 2 \\ 1 & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$



解

$$(1) \begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & 2 \\ 1 & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix} = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) - 2 \times 1 = 1 - 2 = -1.$$

$$(2) \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 \times 1 + 0 \times 3 \times 2 + (-1) \times (-2) \times 2 \\ - (-1) \times 1 \times 2 - 0 \times (-2) \times 1 - 3 \times 3 \times 2 = -9.$$

二、行列式的性质

$$n \text{ 阶行列式: 我们记 } D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

它由 n 行、 n 列元素(共 n^2 个元素)组成,称之为 n 阶行列式. 其中,每一个数 a_{ij} 称为行列式的一个元素,它的前一个下标 i 称为行标,它表示这个数 a_{ij} 在第 i 行上;后一个下标 j 称为列标,它表示这个数 a_{ij} 在第 j 列上,所以 a_{ij} 在行列式第 i 行和第 j 列的交叉位置上. n 阶行列式 D_n 通常也简记作 $|a_{ij}|_n$. 类似二、三阶行列式, n 阶行列式表示的也是一个算式,至于 n 阶行列式的具体值如何来计算,我们将在下一节中提到.

定义 3 设有 n 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, 将 D 的第 $1, 2, \dots, n$ 行依次变为第

$1, 2, \dots, n$ 列,得到的新行列式称为 D 的转置行列式,记为 D^T ,即 $D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

显然 $(D^T)^T = D$.

性质 1 行列式转置以后值不变,即 $D^T = D$.

此性质说明在行列式中行与列具有相同的地位. 因此,凡是有关行的性质,对于列也同样成立.

性质 2 交换行列式中任意两行(列)的位置,行列式改变符号.

推论 1 如果行列式中有两行(列)的对应元素完全相同,那么该行列式等于零.

性质 3 行列式的某一行(列)的所有元素同乘以数 k ,等于用数 k 乘以该行列式.



$$\text{即} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由性质 3 可得以下推论:

推论 2 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子,可以提到行列式符号外面.

当性质 3 中的 $k=0$ 时,就有如下推论:

推论 3 如果行列式中有一行(列)全为零,那么该行列式等于零.

推论 4 如果行列式中有两行(列)的元素对应成比例,那么该行列式等于零.

性质 4 如果行列式的某一行(列)的元素为两组数的和,那么该行列式可以分成两个行列式之和. 而且这两个行列式除这一行(列)以外的其他元素与原行列式的对应元素一样. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1+y_1 & x_2+y_2 & \cdots & x_n+y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5 数 k 乘以行列式中的某一行(列)的所有元素,加到另一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

说明:今后在进行行列式计算时,为了简明地表达解题过程,同时便于检查,我们约定:

(1) r_i 表示第 i 行.

(2) c_j 表示第 j 列.

(3) r_j+kr_i (c_j+kc_i) 表示将第 i 行(列)的 k 倍加到第 j 行(列)上去.

(4) $r_i \leftrightarrow r_j$ ($c_i \leftrightarrow c_j$) 表示将第 i 行(列)与第 j 行(列)交换位置.

例 2 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & -12 \end{vmatrix}$.



解 通过观察发现行列式的第2列与第3列对应元素成比例,由推论4可知 $D=$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 3 & 6 & -12 \end{vmatrix} = 0.$$

例3

计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 8 \\ -1 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$

解 通过观察发现行列式的第2行恰为第1行与第3行之和,所以

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 8 \\ -1 & 4 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3+r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

三、行列式的计算

1. 行列式的展开

定义4 在 n 阶行列式中,划去元素 a_{ij} 所在的行和列,余下的元素按原来的位置不变构成的新行列式称为 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij} .

在 M_{ij} 前面冠以符号 $(-1)^{i+j}$ 后,称为 a_{ij} 的代数余子式,记作 A_{ij} ,即 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

例4 设 $D = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & 2 & 8 \end{vmatrix}$,求元素 a_{21} 、 a_{32} 的余子式和代数余子式.

解 元素 a_{21} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 12, A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -12.$$

元素 a_{32} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -26, A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 26.$$

定理1 拉普拉斯展开定理

n 阶行列式 D 等于其任意一行(列)中的各元素与其对应的代数余子式乘积之和.即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$

这个定理称为拉普拉斯定理,利用此定理可以进行降阶运算.但在计算行列式时,直接利用此定理进行行列式展开并不一定能简化运算,而当行列式中某一行或某一列中含有较多零时,运用此定理将会非常简便.



推论 5 当 n 阶行列式 D 的第 i 行(或第 j 列)中只有一个非零元素 a_{ij} 时, $D=a_{ij}A_{ij}$.

例如:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \\ 7 & 6 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 5 \times 5 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 550.$$

2. 行列式的计算

行列式的计算方法主要有以下几种:

(1) 对二阶、三阶行列式通常应用对角线法则直接求值.

(2) 对于高阶行列式可以利用行列式的性质, 将其转化为三角形行列式, 再求其值.

(3) 利用行列式的展开定理, 可以使行列式的阶数降低, 从而简化其运算过程, 特别是当某行(列)中含有多个零元素时常用此法.

例 5 求行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 的值.

解

$$\begin{aligned} D &\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1, r_4 - r_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -8 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{r_2 + 2r_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 - 3r_2, r_4 + 3r_2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -10 & 19 \\ 0 & 0 & 11 & -17 \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 + r_4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 11 & -17 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_4 - 11r_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -39 \end{vmatrix} \\ &= -(1 \times 1 \times 1 \times (-39)) = 39. \end{aligned}$$

例 6 求行列式 $D = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ 的值.

解 我们发现除了主对角线外, 其他元素都是 1, 另外, 每列元素的和都是 8, 因此, 将第四行、第三行、第二行同时加到第一行, 再提出公因式 8, 即



$$D \xrightarrow{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix} 8 & 8 & 8 & 8 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \div 8} 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-r_1, r_3-r_1, r_4-r_1} 8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 \times 1 \times 4 \times 4 \times 4 = 512.$$

例 7 证明: n 阶下三角行列式(当 $i < j$ 时, $a_{ij} = 0$, 即主对角线以上元素全为 0)

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

证明 对 n 作数学归纳法, 当 $n=2$ 时, 结论成立.

假设结论对 $n-1$ 阶下三角行列式成立, 则由定义得

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

右端行列式是 $n-1$ 阶下三角行列式, 根据归纳假设得

$$D_n = a_{11} (a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}).$$

同理可证, n 阶对角行列式(非主对角线上元素全为 0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

又根据性质 1 有 n 阶上三角行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

例题 7 的结论非常重要, 以后行列式的计算, 主要是利用其性质和本结论来计算的.



任务1 空间直角坐标系

【理论学习】

一、向量的概念

在客观世界里有一些量,如时间、重量、温度、面积等,在给定单位后,可以用一个实数来表示,这种只有大小的量称为数量或标量.但有些量除了大小,还有方向.如物体的位移(沿某方向移动一段距离)、质点运动的速度、作用在物体上的力等,它们除了大小以外,还有方向.这种既有大小,又有方向的量称为向量或矢量.

在数学上,常用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示向量.如图 1.1.1 所示,有向线段的长度 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向, A 、 B 分别叫做向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点和终点.向量也常用粗体字或上面加一箭头的字母表示,如 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 或 $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 等.

向量的大小称为向量的模(或长度),记做 $|\overrightarrow{AB}|$ 、 $|\vec{a}|$ 或 $|\vec{b}|$.模为零的向量称为零向量,记做 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$,规定零向量的方向是任意的.模为 1 的向量称为单位向量,与非零向量 $\mathbf{a}$ 同方向的单位向量记为 $\mathbf{a}^\circ$,即 $\mathbf{a}^\circ = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$.与向量 $\mathbf{a}$ 的模相等,方向相反的向量称为 $\mathbf{a}$ 的负向量,记为 $-\mathbf{a}$.

数学上常讨论与起点无关的向量,这种向量称为自由向量.只要两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的模相等,且方向相同,就认为它们是同一向量,或称这两个向量相等,记做 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$.如图 1.1.2 所示, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

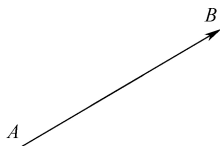


图 1.1.1

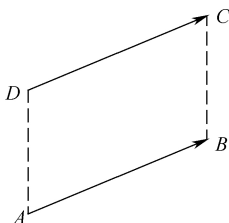


图 1.1.2

以坐标原点 O 为起点,向一个点 M 引向量 $\overrightarrow{OM}$,这个向量称为点 M 对于原点的向径,用粗体字母 $\mathbf{r}$ 表示.

设有两个非零向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$,在空间中任取一点 O ,作 $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ 、 $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$,规定角 $\angle AOB=\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) 为两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的夹角,记为 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$,即 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})=\theta$.

若两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的夹角 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$,则称两向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 平行,记为 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$;若 $\theta=\frac{\pi}{2}$,则称两向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 垂直(或正交),记为 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.



二、向量的线性运算

1. 向量的加法

定义 1.1.1 设 a, b 是两个向量, 任取一点 A 作为 a 的起点, 使得 $\overrightarrow{AB} = a$, 再以 B 作为 b 的起点使得 $\overrightarrow{BC} = b$, 记向量 $\overrightarrow{AC} = c$, 则称向量 c 为向量 a 与 b 的和向量, 记做 $c = a + b$.

由于向量 a, b 与 $a + b$ 构成一个三角形(如图 1.1.3 所示), 因此, 上述作两向量之和的方法叫做向量加法的三角形法则.

如果向量 a 与 b 不平行, 对于取定的一点 A , 以 A 作为 a 与 b 的公共起点, 使得 $\overrightarrow{AB} = a$, $\overrightarrow{AD} = b$, 以 AB, AD 为邻边的平行四边形 $ABCD$ 的对角线向量 $\overrightarrow{AC} = a + b$ (如图 1.1.4 所示), 这种求两向量之和的方法叫做向量加法的平行四边形法则.

向量的加法满足以下运算律:

(1) 交换律: $a + b = b + a$.

(2) 结合律: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

另外, 我们规定向量 a 和 $-b$ 的和向量叫做 a 与 b 的差向量, 记为 $a - b$.

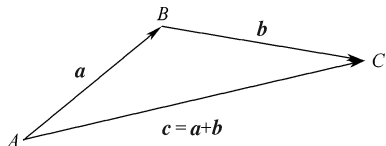


图 1.1.3

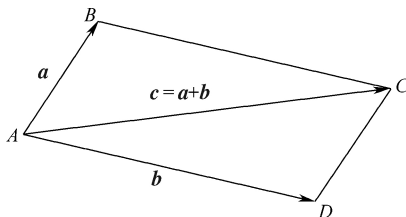


图 1.1.4

2. 数与向量的乘法

定义 1.1.2 设 λ 是一个实数, a 是一个向量, 定义 λ 与 a 的乘积为一向量, 记为 λa , 其模 $|\lambda a| = |\lambda| \cdot |a|$, 其方向当 $\lambda > 0$ 时与 a 同向, 当 $\lambda < 0$ 时与 a 反向. 当 $\lambda = 0$ 时, 显然 $\lambda a = 0$.

数与向量的乘法又称为向量的数乘运算, 向量的加法运算和数乘运算叫做向量的线性运算.

向量的线性运算满足如下运算律(其中 a, b, c 为向量, λ, μ 为实数):

(1) 数乘的结合律: $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$.

(2) 数乘对加法的分配律: $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

(3) 数的加法对数乘的分配律: $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$.

三、空间直角坐标系

过空间一个定点 O , 作 3 条相互垂直的数轴 Ox, Oy, Oz , 它们都以 O 为原点, 且有相同的单位长度, 这 3 条数轴分别叫做 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴), 统称为坐标轴. 它们的正向通常符合右手法则, 即右手的食指指向 Ox 轴的正向, 中指指向 Oy 轴的正向, 大拇指指向 Oz 轴的正向(如图 1.1.5 所示), 这样的 3 条坐标轴就构成了一个空间直角坐标系 $Oxyz$, 点 O 叫做坐标原点.



在坐标系 $Oxyz$ 中,由任意两个坐标轴可以确定一个平面,这样确定的 3 个平面统称为坐标面,分别记为 xOy 面、 yOz 面、 zOx 面. 3 个坐标面将空间分为 8 个部分,每个部分叫做一个卦限. 含有 x 轴、 y 轴、 z 轴正半轴的卦限称为第 I 卦限,在 xOy 面的上方,按逆时针方向,依次是第 II、III、IV 卦限,在 xOy 面的下方,第 I 卦限的下方称为第 V 卦限,按逆时针方向,依次为第 VI、VII、VIII 卦限,如图 1.1.6 所示.

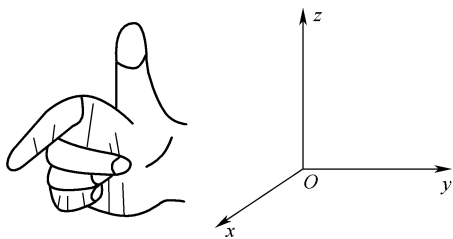


图 1.1.5

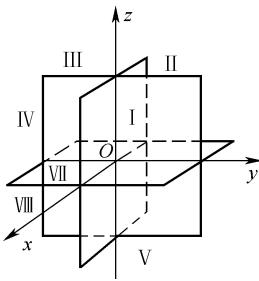


图 1.1.6

四、点的坐标和空间中两点间的距离公式

设 M 是空间中任意一点,过点 M 分别作垂直于 x 轴、 y 轴、 z 轴的 3 个平面,它们与 3 个坐标轴的交点依次为 P 、 Q 和 R (如图 1.1.7 所示),这 3 个点在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的坐标依次为 x 、 y 、 z ,则点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x, y, z) ;反之,将以上过程倒过来,可知,任何有序数组 (x, y, z) 一定对应空间中唯一的一点. 这样,空间中的点就与有序数组 (x, y, z) 之间建立起一一对应关系,称有序数组 (x, y, z) 为点 M 的坐标,并依次称 x 、 y 、 z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标,记为 $M(x, y, z)$.

显然,原点的坐标为 $(0, 0, 0)$,横轴上坐标为 x 的点的坐标为 $(x, 0, 0)$. xOy 面上的点的坐标为 $(x, y, 0)$. 第一卦限的点的坐标为 (x, y, z) ,其中 $x > 0, y > 0, z > 0$.

在空间直角坐标系下,设 P 点的坐标为 (a, b, c) ,那么点 P 关于原点 O 的对称点 P' 的坐标为 $(-a, -b, -c)$,点 P 关于 xOy 面的对称点的坐标为 $(a, b, -c)$,点 P 关于 ox 轴的对称点的坐标为 $(a, -b, -c)$.

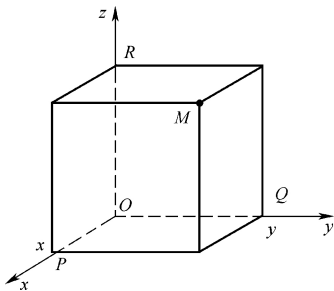


图 1.1.7

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间中两点,过点 M_1 和 M_2 分别作垂直于 3 个坐标轴的平面,这 6 个平面围成一个长方体 (如图 1.1.8),其棱长分别为 $|x_2 - x_1|$ 、 $|y_2 - y_1|$ 和 $|z_2 - z_1|$, M_1M_2 是它的一条对角线,由勾股定理知



$$d = |M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.1.1)$$

特别地, 点 $M(x, y, z)$ 到原点的距离为

$$d = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.1.2)$$

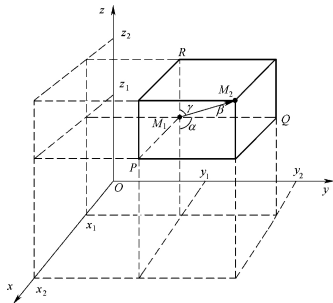


图 1.1.8

【案例分析】

例 1.1.1 如图 1.1.9, 已知力 $F=200\text{kN}$, $\alpha=60^\circ$, 试求力 F 在 x 、 y 轴上的投影.

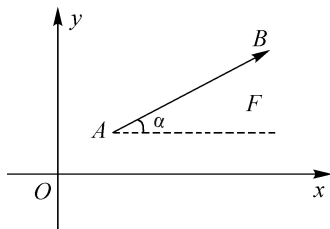


图 1.1.9

解 $X = F \cos \alpha = 200 \cos 60^\circ = 100\text{kN}$,

$Y = F \sin \alpha = 200 \sin 60^\circ = 173.2\text{kN}$.

例 1.1.2 如图 1.1.10 所示为一支架, A 、 B 为铰链支座, C 为圆柱铰链. 斜撑杆 BC 与水平杆 AC 的夹角为 30° . 在支架的 C 处用绳子吊着重 20kN 的重物. 不计杆件的自重, 试求各杆所受的力.

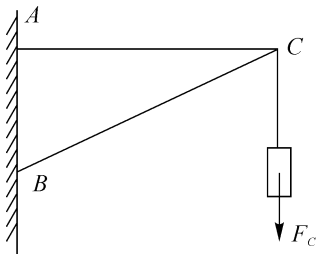


图 1.1.10

解 $F_{CA} = F_T \tan 60^\circ = 34.64\text{kN}$,

$F_{CB} = F_T / \sin 30^\circ = 40\text{kN}$.

例 1.1.3 设 a 为任意非零向量, 验证 $a^\circ = \frac{a}{|a|}$, 即 $a = |a|a^\circ$.



证明 由于 a° 与 a 平行, 故存在 $k(k>0)$, 使得 $a^\circ = ka$, 所以有 $1 = |a^\circ| = k|a|$, 即 $k = \frac{1}{|a|}$, 从而 $a^\circ = \frac{a}{|a|}$, 即 $a = |a|a^\circ$.

例 1.1.4 证明三角形两边的中位线平行于第三边, 且长度为第三边的一半.

证明 如图 1.1.11 所示, 在三角形 ABC 中, D 与 E 分别为 AB 与 BC 的中点, 即

$$\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$

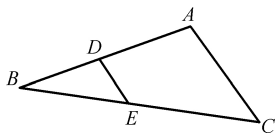


图 1.1.11

$$\text{所以 } \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

例 1.1.5 直角坐标系中, 已知一点 $P(6, 5, 4)$, 求:

(1) P 点到三坐标面的距离.

(2) P 点到三坐标轴的距离.

解 (1) 自 P 点向 xoy 面引垂线, 垂足 P' 的坐标为 $(6, 5, 0)$, 于是 P 点到 xoy 面的距离为

$$|PP'| = \sqrt{(6-6)^2 + (5-5)^2 + (4-0)^2} = 4.$$

同理, 可求得 P 点到其他坐标面的距离分别是 5、6.

(2) P 到 x 轴的距离为

$$d_1 = \sqrt{(6-6)^2 + (5-0)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{41}.$$

同理, 可求出点 P 到 y 轴的距离 $d_2 = \sqrt{52}$, 到 z 轴的距离 $d_3 = \sqrt{61}$.

【拓展训练 1】

一、选择题

1. 在空间直角坐标系中, 位于第七卦限的点是().
A. $(-1, 3, 2)$ B. $(3, 3, 1)$ C. $(-5, -2, -2)$ D. $(-5, 1, -1)$
2. 下列各向量表示单位向量的是().
A. $\{1, 1, 1\}$ B. $\{1, 1, 0\}$ C. $\{0, 1, 1\}$ D. $\{0, 1, 0\}$

二、填空题

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} =$ _____.
2. 已知空间两点 $A(0, 1, 2)$ 和 $B(1, -1, 0)$, 则:
 $\overrightarrow{AB} =$ _____, $|\overrightarrow{AB}| =$ _____, $-2\overrightarrow{BA} =$ _____.

三、计算题

1. 求点 $(2, -3, -1)$ 关于 xOy 平面、 y 轴、原点对称点的坐标.
2. 求两点 A, B 间的距离:



(1) $A(-2, 1, 3), B(0, -1, 2)$; (2) $A(-1, 2, -1), B(-3, -5, 1)$.

四、证明题

证明: $A(1, 2, 3), B(3, 1, 5), C(2, 4, 3)$ 是一个直角三角形的三个顶点.

任务 2 向量的坐标

【理论学习】

空间中的向量 $\mathbf{a}$ 可以经过平移, 把起点移到坐标原点 O , 设其终点为 P , 则向量 $\overrightarrow{OP}$ 决定终点 P ; 反之, 空间中任一点 P 也确定了一个向量 $\overrightarrow{OP}$. 这样, 空间中的点与向量之间建立了一一对应关系, 点 P 的坐标 (a_1, a_2, a_3) 也叫做向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标或分量, 为了区别点的坐标与向量的坐标, 向量的坐标记为

$$\overrightarrow{OP} = \mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}.$$

如图 1.2.1 所示, 零向量可用记号 $\mathbf{0} = \{0, 0, 0\}$ 表示, 两个向量相等当且仅当它们的分量相等, 即

$$\{a_1, a_2, a_3\} = \{b_1, b_2, b_3\} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3.$$

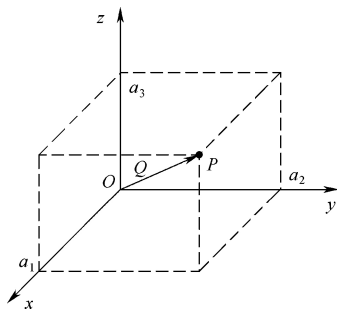


图 1.2.1

一、向量的模与方向余弦的坐标表示式

向量的主要特征是长度和方向, 任给一向量 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OM} = \{a_1, a_2, a_3\}$, 由图 1.2.2 可以看出, 它的模是线段 OM 的长, 于是有

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (1.2.1)$$

以下讨论如何确定向量的方向.

设向量 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OM}$ 与 x, y, z 轴的夹角分别为 α, β, γ , 则称 α, β, γ 为向量 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OM}$ 的方向角, 由图 1.2.2 知

$$a_1 = |\mathbf{a}| \cdot \cos \alpha, a_2 = |\mathbf{a}| \cdot \cos \beta, a_3 = |\mathbf{a}| \cdot \cos \gamma.$$

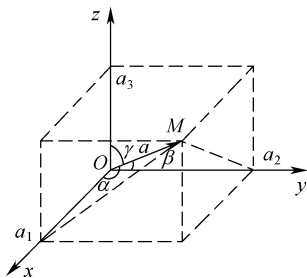


图 1.2.2

$$\text{即 } \cos\alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}.$$

将 $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ 代入以上各式,得

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.\end{aligned}\tag{1.2.2}$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 的方向余弦.

将式(1.2.2)的3个等式两边平方后相加可得

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

这就是说,任一非零向量的方向余弦所组成的向量 $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 为单位向量.

两个非零向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$, 如果它们的方向相同或相反, 则称 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行. 两非零向量 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ 与向量 $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ 平行的充要条件是存在唯一的实数 $\lambda \neq 0$, 使得 $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, 其坐标表示为 $\{a_1, a_2, a_3\} = \lambda\{b_1, b_2, b_3\}$, 即两向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 对应的坐标成比例

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda.$$

二、向量的加法、减法和数乘

前面我们介绍了向量的加法、减法和数乘运算, 引入了向量的坐标表示, 向量间的运算可以转化为它们的坐标之间的运算.

定义 1.2.1 设向量 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ 与向量 $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, 则向量 $\mathbf{a}$ 与向量 $\mathbf{b}$ 的加减法规定为

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \{a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3\}.$$

向量 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ 与数 λ 的乘法(即数乘)规定为

$$\lambda\mathbf{a} = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}.$$

显然, 向量 $\mathbf{a}$ 的负向量 $-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a}$, 零向量 $\mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{a}$.

以 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别表示在 x, y, z 轴正向的单位向量, 称它们为这一坐标系中的基向量, 即

$$\mathbf{i} = \{1, 0, 0\}, \mathbf{j} = \{0, 1, 0\}, \mathbf{k} = \{0, 0, 1\}.$$



则向量 $\mathbf{a}$ 可表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \{a_1, a_2, a_3\} = \{a_1, 0, 0\} + \{0, a_2, 0\} + \{0, 0, a_3\} \\ &= a_1\{1, 0, 0\} + a_2\{0, 1, 0\} + a_3\{0, 0, 1\} \\ &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},\end{aligned}\tag{1.2.3}$$

上式称为向量 $\mathbf{a}$ 按基向量的分解式.

由图 1.2.3 可以看出, 向量加法的坐标也满足平行四边形法则.

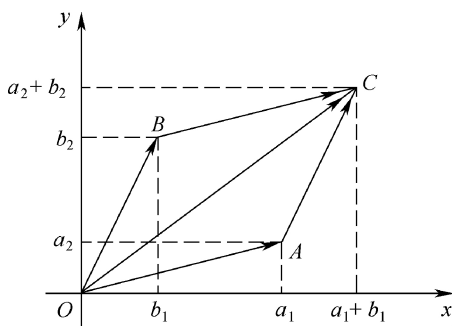


图 1.2.3

三、两向量的数量积

定义 1.2.2 两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的模与它们之间夹角的余弦的乘积称为向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的数量积(或点乘), 记做 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 即

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

在力学中, 某物体在常力 F 的作用下, 沿直线从 A 点移到 B 点, 力 F 所作的功 W 就是 F 与位移 $\overrightarrow{AB}$ 的数量积, 即

$$W = F \cdot \overrightarrow{AB} = |F| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\varphi.$$

其中 φ 是 F 与 $\overrightarrow{AB}$ 的夹角.

由数量积的定义, 可以推得向量的数量积有以下性质:

(1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$.

(2) 两个非零向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 垂直的充要条件是 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

向量的数量积满足以下运算律:

设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是向量, λ 是实数, 则有

(1) 交换律: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

(2) 分配律: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

(3) 结合律: $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$.

根据向量的数量积的运算律和性质, 可知

若 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\},$

则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})$

$$= a_1\mathbf{i}(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_2\mathbf{j}(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) + a_3\mathbf{k}(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})$$

$$= a_1b_1\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_1b_2\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_1b_3\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + a_2b_1\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_2b_2\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + a_2b_3\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} + a_3b_1\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} +$$



$$a_3 b_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + a_3 b_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}.$$

由于 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 为相互垂直的单位向量, 所以

$$\begin{aligned}\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0, \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1.\end{aligned}$$

于是有

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (1.2.4)$$

上式叫向量数量积的坐标表达式, 由上式知两个向量的数量积等于它们对应坐标乘积之和, 由此可知, 当 $\mathbf{a} \neq 0, \mathbf{b} \neq 0$ 时,

$$\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}, \quad (1.2.5)$$

这是两向量夹角余弦的坐标表达式.

向量 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ 的充要条件是 $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$.

四、两向量的向量积

定义 1.2.3 两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的向量积(或叉积)为向量 $\mathbf{c}$, 记作 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, 如图 1.2.4 所示, 其模和方向分别为

(1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin \theta$, 其中 θ 是 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的夹角.

(2) $\mathbf{c}$ 的方向垂直于 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 所决定的平面, 且指向使 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 符合右手法则, 如图 1.2.5 所示.

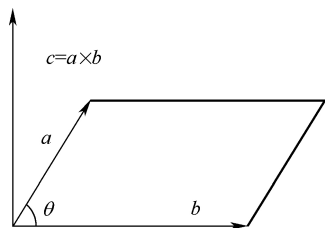


图 1.2.4

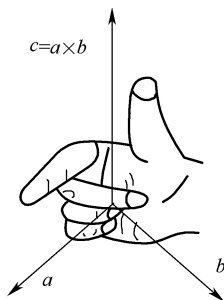


图 1.2.5

在力学中, 设 O 为一杠杆的支点, 力 F 作用在杠杆上的点 P 处, 如图 1.2.6 所示, 力 F 对支点 O 的力矩 M 是一个向量, 可表示为

$$\mathbf{M} = \overrightarrow{OP} \times \mathbf{F}.$$

当 $\mathbf{a} \neq 0, \mathbf{b} \neq 0$, 且 $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 不等于 0 或 π 时, $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 向量积的模 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, 等于以 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 为邻边的平行四边形的面积(如图 1.2.7 所示).

向量积有如下性质:

(1) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

(2) 若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为非零向量, 则 $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ 的充要条件是 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

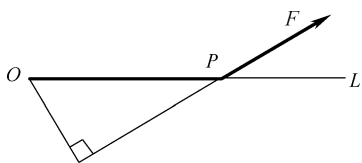


图 1.2.6

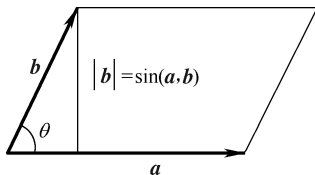


图 1.2.7

向量积满足以下运算律:

设 a, b, c 是向量, λ 是实数, 则有

(1) 反交换律: $b \times a = -a \times b$.

(2) 分配律: $(a+b) \times c = a \times c + b \times c, c \times (a+b) = c \times a + c \times b$.

(3) 结合律: $(\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b)$.

由向量积的定义, 可以得到基向量 i, j, k 的向量积有如下结果:

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0.$$

$$i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j.$$

$$j \times i = -k, k \times j = -i, i \times k = -j.$$

设 $a = \{a_1, a_2, a_3\}, b = \{b_1, b_2, b_3\}$, 利用向量积运算律及基向量 i, j, k 的向量积结果可以得到两个向量的向量积的坐标表示形式.

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_1 i + a_2 j + a_3 k) \times (b_1 i + b_2 j + b_3 k) \\ &= a_1 b_1 (i \times i) + a_1 b_2 (i \times j) + a_1 b_3 (i \times k) \\ &\quad + a_2 b_1 (j \times i) + a_2 b_2 (j \times j) + a_2 b_3 (j \times k) \\ &\quad + a_3 b_1 (k \times i) + a_3 b_2 (k \times j) + a_3 b_3 (k \times k). \end{aligned}$$

即

$$a \times b = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k. \quad (1.2.6)$$

为了便于记忆, 可将上式写成三阶行列式

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (1.2.7)$$

【案例分析】

例 1.2.1 已知两点 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$ 和 $M_2(3, 0, 2)$, 求向量 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解 设向量 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 的方向角分别为 α, β, γ .

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \{3-4, 0-\sqrt{2}, 2-1\} = \{-1, -\sqrt{2}, 1\}.$$

向量的模为

$$|\overrightarrow{M_1 M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = 2.$$

方向余弦为



$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\gamma = \frac{1}{2}.$$

方向角为

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = \frac{3\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{3}.$$

例 1.2.2 设空间中点 A 的坐标为 $A(a, b, c)$, 其中 $a=15, b=8, c<0$, $\overrightarrow{OA}$ 与 Ox 轴的夹角为 30° , 求 $\overrightarrow{OA}$ 的模、方向余弦及点 A 的坐标.

解 设 $\overrightarrow{OA}$ 的方向角为 α, β, γ , 已知 $\alpha=30^\circ$, 故 $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 于是

$$|\overrightarrow{OA}| = \frac{a}{\cos\alpha} = 10\sqrt{3},$$

$$\cos\beta = \frac{b}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{8}{10\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{15}.$$

又 $c<0$, 且 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, 从而

$$\cos\gamma = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{15}\right)^2} = -\frac{\sqrt{33}}{30}.$$

因此

$$c = |\overrightarrow{OA}| \cdot \cos\gamma = 10\sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{33}}{30}\right) = -\sqrt{11}.$$

于是点 A 的坐标为 $(15, 8, -\sqrt{11})$.

例 1.2.3 已知两点 $A(4, 0, 5)$ 和 $B(7, 1, 3)$, 求方向与 $\overrightarrow{AB}$ 一致的单位向量及与 $\overrightarrow{AB}$ 平行的单位向量.

解 $\overrightarrow{AB} = \{7-4, 1-0, 3-5\} = \{3, 1, -2\}$,

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}.$$

设 a° 是与 $\overrightarrow{AB}$ 方向一致的单位向量, 则

$$a^\circ = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \{3, 1, -2\} = \left\{ \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}} \right\}.$$

与 $\overrightarrow{AB}$ 平行方向的单位向量为 $\pm a^\circ$, 即 $\left\{ \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}} \right\}$ 和 $\left\{ -\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}} \right\}$.

例 1.2.4 设向量 $a = \{2, 1, -2\}$, $b = \{0, 1, -1\}$, 求:

(1) $a \cdot b$; (2) $|a|$ 、 $|b|$ 和 (a, b) .

解 (1) $a \cdot b = 2 \times 0 + 1 \times 1 + (-2) \times (-1) = 3$.

(2) $|a| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$, $|b| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

$$\text{所以 } \cos(a, b) = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

于是 $(a, b) = \frac{\pi}{4}$.



例 1.2.5 已知 $a = \{2, 5, 7\}$, $b = \{1, 2, 4\}$, 求同时垂直于 a 和 b 的单位向量.

解 向量 $\pm(a \times b)$ 与向量 a, b 都垂直, $\pm \frac{a \times b}{|a \times b|}$ 即为所求单位向量.

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6i - j - k,$$

由于 $|a \times b| = \sqrt{6^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{38}$, 因此所求的单位向量为

$$\pm \frac{a \times b}{|a \times b|} = \pm \frac{1}{\sqrt{38}}(6i - j - k).$$

【拓展训练 2】

一、填空题

1. 如果向量 $a = i + 3j - 2k$ 与 $b = 2i + 6j + zk$ 垂直, 则 $z =$ _____.
2. 设 a, b 和 c 是三个任意向量, 则 $(a + b) \times c =$ _____.
3. 设向量 $a = i + j, b = j - k$, 则 $(a, b) =$ _____.
4. 设 $A(1, 3, 2), B(2, -1, 2)$, 则向量 $\overrightarrow{AB}$ 在坐标轴上的投影分别是 _____.
5. 设向量 $a = \{2, -2, 1\}, b = \{1, 1, 4\}$, 则 $a \times b =$ _____.

二、计算题

1. 设向量 $a = 3i + 2j - k$ 与 $b = i - j + 2k$, 求:
 - (1) $a \cdot b$; (2) $5a \cdot 3b$; (3) $a \cdot i, a \cdot j, a \cdot k$.
2. 设向量 $a = \{3, 2, -1\}, b = \{1, -1, 2\}$, 求:
 - (1) $a \times b$; (2) $2a \times 7b$; (3) $a \times i, i \times a$.
3. 设 a, b, c 为单位向量, 且满足 $a + b + c = 0$, 求: $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$.
4. 已知向量 $a = \{2, -3, 1\}, b = \{1, -1, 3\}, c = \{1, -2, 0\}$, 求:
 - (1) $(a \cdot b) \cdot c$; (2) $(a \times b) \cdot c$; (3) $a \times (b \times c)$.

任务3 平面方程与空间直线方程

【理论学习】

本节将以向量为工具, 在空间直角坐标系中建立平面方程和空间直线方程, 研究它们之间的关系.

一、平面方程

1. 平面的点法式方程

平面的方向可以由与它垂直的一个向量来确定, 和平面垂直的非零向量称为该平面的



法向量.

设平面 π 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 其法向量为 $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ (其中 A, B, C 不全为零). 设 $M(x, y, z)$ 是平面 π 上的任意一点 (如图 1.3.1 所示), 则向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 $\mathbf{n}$ 垂直, 故

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.$$

而

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\},$$

所以

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (1.3.1)$$

这个方程叫做平面的点法式方程.

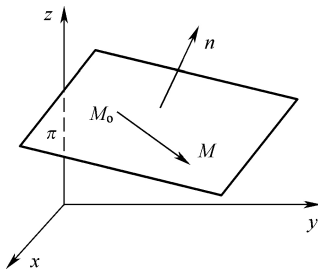


图 1.3.1

2. 平面的一般方程

平面的点法式方程是 x, y, z 的三元一次方程, 它可以化为

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1.3.2)$$

其中

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$

这个方程叫做平面的一般式方程, 其中 x, y, z 的系数构成的向量 $\{A, B, C\}$, 就是该平面的一个法向量.

当 A, B, C, D 中有一些为零时, (1.3.2) 式表示的平面具有特殊的位置.

若 $D = 0$ 时, 方程 $Ax + By + Cz = 0$ 表示一个过原点的平面.

若 A, B, C 中有一个为零, 例如 $C = 0$ 时, 在方程 $Ax + By + D = 0$ 中, 法向量 $\{A, B, 0\}$ 垂直于 z 轴, 方程表示一平行于 z 轴的平面.

若 A, B, C 中有两个为零, 例如 $A = B = 0$ 时, $Cz + D = 0$ 或 $z = -\frac{D}{C}$, 法向量 $\{0, 0, C\}$ 同时垂直于 x 轴和 y 轴, 方程表示一个平行于 xOy 面的平面.

3. 平面的截距式方程

设平面的一般方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$ 且 $ABCD \neq 0$, 若平面通过坐标轴上的三点 $P_1(a, 0, 0), P_2(0, b, 0), P_3(0, 0, c)$, 则有

$$\begin{cases} Aa + D = 0, \\ Bb + D = 0, \\ Cc + D = 0. \end{cases}$$