图书在版编目（CIP）数据

应用高等数学：经管类 / 杨勇，李薇主编. — 上海：华东师范大学出版社，2016
ISBN 978-7-5675-6045-1

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①杨… ②李… Ⅲ. ①高等数学—高等职业教育—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第006967号

应用高等数学（经管类）

主　　编　杨　勇　李　薇
项目编辑　皮瑞光
特约审读　王小双
装帧设计　创图文化

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　　邮　　编　200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　　行政传真　021-62572105
客服电话　021-60865537　　门市（邮购）电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　成都市海翔印务有限公司
开　　本　787 × 1092　16开
印　　张　14.25
字　　数　330千字
版　　次　2016年12月第1版
印　　次　2016年12月第1次
书　　号　ISBN 978-7-5675-6045-1/O・275
定　　价　38.00元

出 版 人　王　焰

目　录

项目 1

经济函数及函数的极限

函数是经济数学中最重要的基本概念之一，也是经济数学的主要研究对象. 本项目我们将在中学数学函数的基础上，学习一些常用的经济函数. 极限是微积分学的一个最基本、最重要的概念. 其一，它是建立微积分学的基础；其二，极限的思想和分析方法将贯穿微积分学的始终，微分法和积分法都借助于极限思想来讨论和研究. 本项目将讨论函数极限的基本概念、基本性质和基本运算，并讨论它们的一些应用.

本项目在专业课中的应用

●经济管理专业中总成本、总收入、总利润的求法.
●经济管理专业中单利、复利的求法.
●经济管理专业中多次付息、贴现的求法.
●经济管理专业中需求与供给的求法.

任务 1　常用经济函数的认识

在现实生活中，用数学方法研究经济活动时，需要对经济问题建立数学模型，找出各经济变量之间的函数关系. 下面，我们介绍一些常用的经济函数.

【理论学习 1】

一、单利与复利

利息是资金所有者由于借出资金而取得的报酬，它来自于生产者使用该笔资金发挥生产职能而形成的利润的一部分. 利息又分为存款利息、贷款利息、债券利息、贴现利息等几种主要形式.

1. **单利计算公式**

设初始本金为 p(元),银行年利率为 r. 则

第一年末本利和为 $s_1=p+rp=p(1+r)$.

第二年末本利和为 $s_2=p(1+r)+rp=p(1+2r)$.

……

第 n 年末的本利和为 $s_n=p(1+nr)$.

2. **复利计算公式**

设初始本金为 p(元),银行年利率为 r. 则

第一年末本利和为 $s_1=p+rp=p(1+r)$.

第二年末本利和为 $s_2=p(1+r)+rp(1+r)=p(1+r)^2$.

……

第 n 年末的本利和为 $s_n=p(1+r)^n$.

二、多次付息

1. **单利付息情形**

因每次的利息都不计入本金,故若一年分 n 次付息,则年末的本利和为

$$s=p\left(1+n\frac{r}{n}\right)=p(1+r),$$

即年末的本利和与支付利息的次数无关.

2. **复利付息情形**

因每次支付的利息都记入本金,故年末的本利和与支付利息的次数是有关系的.

设初始本金为 p(元),年利率为 r,若一年分 m 次付息,则一年末的本利和为

$$s=p\left(1+\frac{r}{m}\right)^m.$$

易见本利和是随付息次数 m 的增大而增加的.

因此,第 n 年末的本利和为

$$s_n=p\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}.$$

三、贴现

票据的持有人,为在票据到期以前获得资金,从票面金额中扣除未到期期间的利息后,得到所余金额的现金称为贴现.

钱存在银行里可以获得利息,如果不考虑贬值因素,那么若干年后的本利和就高于本金. 如果考虑贬值的因素,则在若干年后使用的未来值(相当于本利和)就有一个较低的现值.

考虑更一般的问题:确定第 n 年后价值为 R 元钱的现值. 假设在这 n 年之间复利年利率 r 不变.

利用复利计算公式有

$$R=p(1+r)^n,$$

得到第 n 年后价值为 R 元钱的现值为

$$p=\frac{R}{(1+r)^n},$$

式中 R 表示第 n 年后到期的票据金额，r 表示贴现率，而 p 表示现在进行票据转让时银行付给的贴现金额.

若票据持有者手中持有若干张不同期限及不同面额的票据，且每张票据的贴现率都是相同的，则一次性向银行转让票据而得到的现金

$$p=R_0+\frac{R_1}{(1+r)}+\frac{R_2}{(1+r)^2}+\cdots+\frac{R_n}{(1+r)^n},$$

式中 R_0 为已到期的票据金额，R_n 为 n 年后到期的票据金额. $\frac{1}{(1+r)^n}$称为贴现因子，它表示在贴现率 r 下 n 年后到期的 1 元钱的贴现值. 由它可给出不同年限及不同贴现率下的贴现因子表.

四、总成本函数、总收入函数、总利润函数

1. 总成本函数

总成本函数是指在一定时期内，生产产品时所消耗的生产费用之总和. 常用 C 表示，可以看作是产量 Q 的函数，记作

$$C=C(Q).$$

总成本包括固定成本和可变成本两部分，其中固定成本 F 指在一定时期内不随产量变动而支出的费用，如厂房、设备的固定费用和管理费用等；可变成本 V 是指随产品产量变动而变动的支出费用，如税收、原材料、电力燃料等.

固定成本和可变成本是相对于某一过程而言的. 在短期生产中，固定成本是不变的，可变成本是产量 Q 的函数，所以 $C(Q)=F+V(Q)$，在长期生产中，支出都是可变成本，此时 $F=0$. 实际应用中，产量 Q 为正数，所以总成本函数是产量 Q 的单调增加函数，常用以下初等函数来表示：

①线性函数　$C=a+bQ$，其中 $b>0$ 为常数.

②二次函数　$C=a+bQ+cQ^2$，其中 $c>0,b<0$ 为常数.

③指数函数　$C=be^{aQ}$，其中 $a>0,b>0$ 为常数.

平均成本：每个单位产品的成本，即 $\overline{C}=\frac{C(Q)}{Q}$.

2. 总收益函数

总收益函数是指生产者出售一定产品数量 Q 所得到的全部收入，常用 R 表示，即

$$R=R(Q),$$

其中 Q 为销售量. 显然，$R|_{Q=0}=R(0)=0$，即未出售商品时，总收益为 0.

若已知需求函数 $Q=Q(p)$，则总收益的为 $R=R(Q)=P\cdot Q=Q^{-1}(p)\cdot Q$

平均收益：$\overline{R}=\frac{R(Q)}{Q}$，若单位产品的销售价格为 p，则 $R=p\cdot Q$，且 $\overline{R}=p$.

3.总利润函数

总利润函数是指生产中获得的纯收入,为总收益与总成本之差,常用 L 表示,即

$$L(Q)=R(Q)-C(Q)$$

【案例分析 1】

想一想 已知某产品的价格为 p 元,需求函数为 $Q=50-5p$,成本函数为 $C=50+2Q$ 元,求产量 Q 为多少时利润 L 最大?最大利润是多少?

解 因为需求函数为 $Q=50-5p$,$p=10-\frac{Q}{5}$,所以收益函数为

$$R=p\cdot Q=10Q-\frac{Q^2}{5}.$$

利润函数

$$\begin{aligned}L=R-C&=8Q-\frac{Q^2}{5}-50\\&=-\frac{1}{5}(Q-20)^2+30.\end{aligned}$$

因此,$Q=20$ 时利润最大,且最大利润是 30 元.

例 1.1.1 某工厂生产某产品,每日最多生产 100 个单位.日固定成本为 130 元,生产每一个单位产品的可变成本为 6 元,求该厂每日的总成本函数及平均单位成本函数.

解 设每日的总成本函数为 C 及平均单位成本函数为 $\overline{C}$,因为总成本为固定成本与可变成本之和,据题意有

$$C=C(Q)=130+6Q,0\leqslant x\leqslant 100,$$

$$\overline{C}=\overline{C}(Q)=\frac{130}{Q}+6,0<x\leqslant 100.$$

例 1.1.2 设某商店以每件 a 元的价格出售商品,若顾客一次购买 50 件以上,则超出部分每件优惠 10%,试将一次成交的销售收入 R 表示为销售量 Q 的函数.

解 由题意,一次售出 50 件以内的收入为 $R=aQ$ 元,而售出 50 件以上是,收入为

$$R=50a+(Q-50)\cdot a\cdot 10\%.$$

所以一次成交的销售收入 R 是销售量 Q 的分段函数

$$R=\begin{cases}aQ,0\leqslant x\leqslant 50,\\50a+0.9a(Q-50),x>50.\end{cases}$$

【理论学习 2】

五、需求函数与供给函数

1.需求函数

需求量指的是在一定时间内,消费者对某商品愿意而且有支付能力购买的商品数量.

经济活动的主要目的是在于满足人们的需求,经济理论的主要任务之一就是分析消费

及由此产生的需求.但需求量不等于实际购买量,消费者对商品的需求受多种因素影响,例如,季节、收入、人口分布、价格、等等.其中影响的主要因素是商品的价格,所以,我们经常将需求量 Q_d 看作价格 p 的函数,记为

$$Q_d=Q_d(p).$$

通常假设需求函数是单调减少的,需求函数的反函数

$$p=Q^{-1}(p),Q\geqslant 0.$$

在经济学中也称为需求函数,有时称为价格函数.

一般说来,降价使需求量增加,价格上涨需求量反而会减少,即需求函数是价格 p 的单调减少函数.常用以下简单的初等函数来表示:

①线性函数 $Q_d=-ap+b$,其中 $a,b>0$ 为常数.

②指数函数 $Q_d=ae^{-bp}$,其中 $a,b>0$ 为常数.

③幂函数 $Q_d=bp^{-a}$,其中 $a,b>0$ 为常数.

2.供给函数

供给量是指在一定时期内生产者愿意生产并可向市场提供出售的商品量,供给价格是指生产者为提供一定量商品愿意接受的价格,将供给量 Q_s 也看作价格 p 的函数,记为

$$Q_s=Q_s(p).$$

一般说来,价格上涨刺激生产者向市场提供更多的商品,使供给量增加,价格下跌使供给量减少,即供给函数是价格(p)的单调增加函数.常用以下简单的初等函数来表示:

①线性函数 $Q_s=ap+b$,其中 $a,b>0$ 为常数.

②指数函数 $Q_s=ae^{bp}$,其中 $a,b>0$ 为常数.

③幂函数 $Q_s=bp^{a}$,其中 $a,b>0$ 为常数.

供给量也受多种因素影响,当市场上需求量 Q_d 与供给量 Q_s 一致时,即 $Q_d=Q_s$,商品的数量称为均衡数量,记为 Q_e,商品的价格称为均衡价格,记为 p_e.例如,由线性需求和供给函数构成的市场均衡模型可以写成

$$Q_d=a-bp(a>0,b>0),$$
$$Q_s=-c+\mathrm{d}p(c>0,d>0),$$
$$Q_d=Q_s.$$

解方程,可得均衡价格 p_e 和均衡数量 Q_e:

$$p_e=\frac{a+c}{b+d},Q_e=\frac{ad-bc}{b+d}.$$

由于 $Q_e>0,b+d>0$,因此有 $ad>bc$.

当市场价格高于 p_0 时,需求量减少而供给量增加,反之,当市场价格低于 p_0 时,需求量增加而供给量减少.市场价格的调节就是利用供需均衡来实现的.

经济学中常见的还有生产函数(生产中的投入与产出关系)、消费函数(国民消费总额与国民生产总值即国民收入之间的关系)、投资函数(投资与银行利率之间的关系)等等.

【案例分析 2】

例 1.1.3 设某商品的需求函数线性函数 $Q=-ap+b$,其中 $a,b>0$ 为常数,求 $p=0$

时的需求量和 $Q=0$ 时的价格.

解 当 $p=0$ 时,$Q=b$,表示价格为零时,消费者对某商品的需求量为 b,这也是市场对该商品的饱和需求量. 当 $Q=0$ 时,$p=\frac{b}{a}$ 为最大销售价格,表示价格上涨到 $\frac{b}{a}$ 时,无人愿意购买该产品.

例 1.1.4 已知某商品的需求函数和供给函数分别为

$$Q_d=14-1.5p,\quad Q_s=-5+4p.$$

求该商品的均衡价格.

解 由均衡条件 $Q_d=Q_s$ 可知

$$14-1.5p=-5+4p.$$

$$19=5.5p.$$

所以均衡价格价格为 $$p_0=3.45.$$

【拓展训练】

一、选择题

1. 函数 $f(x)=\sin x+1$ 是(　　).

A. 偶函数　　B. 奇函数　　C. 单调函数　　D. 有界函数

2. 下列函数中,是奇函数的是(　　).

A. $\sin x$　　B. 2^x　　C. $x^2+\sin x$　　D. $x+1$

3. 已知 $f(x)=x^2-1$,则 $f(x-1)=$(　　).

A. x^2-2x　　B. x^2+2x　　C. x^2+1　　D. x^2-1

二、填空题

1. 设 $f(x)=x+\sin\frac{1}{x}$,当 $x\neq0$ 时,$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$________.

2. 函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}+x^2$ 的奇偶性是________.

3. 函数 $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sin x}$ 的定义域为________.

三、计算题

1. 求函数 $y=lg(x+2)$ 的反函数.

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-1, & x\geqslant0,\\ 1-3x, & x<0,\end{cases}$ 求 $f(1)$ 和 $f(-1)$.

3. 下列哪些是周期函数,若是,求出其最小正周期:

(1) $y=\sin 2x$;　　(2) $y=\cos(x+2)$;　　(3) $y=\cos\frac{1}{x}$.

4. 已知生产某种商品的总成本函数为 $C(Q)=2000+5Q$(单位:元),求生产 80 件这种商品所需的总成本和平均成本.

5. 已知某种商品的需求函数和供给函数分别为 $Q_d=100-2p$,$Q_s=-20+18p$,求该商品的市场均衡价格和市场均衡数量.

6. 设某商品的成本函数和收入函数分别为

$$C_Q=18-3Q+Q^2, R(Q)=8Q.$$

试求：(1)该商品的销售量为5时的利润；(2)该商品的盈亏平衡点，并说明盈亏情况.

任务2　极限的概念及运算

极限是微积分学中的一个基本概念，微积分中许多概念都是用极限表述的，一些重要的性质和定理也是通过极限的方法推得的，因此，掌握极限的思想与极限的计算方法是学会微积分的前提和基础.

【理论学习1】

一、数列的极限

极限的思维方式自古有之，它是从静认识动，从近似认识精确，从有限认识无限的一种思想方法. 我国古代数学家刘徽(第三世纪)利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术，就是极限思想在几何学上的应用. 刘徽曰："割之弥细，所失弥少. 割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣. "这段话说的是用圆内接正多边形的面积来逼近圆面积. 若用 S 表示圆面积，显然，正 n 变形的边数 n 越多，S_n 越接近 S，当边数无限增加时，S_n 就无限接近 S. 这就是刘徽用割圆术来计算圆周率的想法，含有极限思想，是他的一大创造. 下面我们先介绍数列的极限，进而学习函数的极限.

定义 1.2.1　对于以正整数 n 为自变量的函数 $y_n=f(n)$，把函数值依自变量增大的次序排列出来的

$$f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots \text{或} y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots$$

这一系列无穷的数叫做一个数列，记作 $\{y_n\}$ 或 $\{f(n)\}$，数列中每一个数称为数列的项，$f(n)$ 称为一般项或通项.

下面举几个数列的例子：

(1) $y_n=\dfrac{1}{2^n}$；　　(2) $y_n=1+\dfrac{1}{n}$；

(3) $y_n=2n$；　　(4) $y_n=1+(-1)^n$.

从这些例子可以看出，随着 n 的逐渐增大，它们有着各自变化的趋势. 我们发现：有些数列它趋近于一个确定的实数，比如数列(1)和(2)；有些数列趋近于无穷大，如数列(3)；还有些数列在某两个数之间振荡，如数列(4). 那么数列的极限和这些变化趋势有什么关系呢？

定义 1.2.2　对于数列 y_n，如果当 n 无限增大时，y_n 无限趋近于某个确定的常数 A，那么 A 叫做数列 y_n 的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} y_n=A \quad \text{或} \quad y_n\to A(n\to\infty).$$

由此定义可知,数列(1)的极限为 0,即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$;数列(2)的极限为 1,即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

一般地,任何一个常数列$\{C\}$的极限就是这个常数本身,$\lim\limits_{n\to\infty}C=C$($C$ 为常数).

与单调函数相仿,若数列$\{y_n\}$各项满足不等式

$$y_n\leqslant y_{n+1}\ (y_n\geqslant y_{n+1}),$$

则称$\{a_n\}$为单增(减)数列,单增数列与单减数列统称为单调数列.

如果一个数列有极限,我们就称这个数列是收敛的,否则就称它是发散的.数列$\{y_n\}$以 A 为极限,亦称$\{y_n\}$收敛于 A.并不是任何数列都有极限,有些数列就没有极限.如 $y_n=2n$,当 $n\to\infty$时,y_n 的数值无限增大,它不趋向于一个确定的数值,所以就没有极限.但是,单调有界数列必有极限.

【案例分析 1】

例 1.2.1 观察下列数列的极限:

(1)$y_n=1+\frac{(-1)^{n+1}}{2n}$;　　(2)$y_n=\sin\frac{n\pi}{2}$;　　(3)$y_n=5$.

解 通过观察可知,以上数列有如下变化趋势:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{2n}\right)=1$.

(2)当 n 依次取 1、2、3 等正整数时,数列$\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$的各项依次为 $1,0,-1,0,1,\cdots$,所以可以看出,当 $n\to\infty$时,$\left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$不能无限趋近于一确定的常数 A,根据定义知,该数列发散.

(3)我们有$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}5=5$.

【理论学习 2】

二、函数的极限

我们可以把数列看成是函数的一种特殊情况,因此,数列极限也有函数极限的一些性质.可以想象,两者虽然在形式上有所差异,但在本质上,在极限观点上应该是一致的.当然,函数的极限肯定比数列的极限要复杂一些.数列的自变量只有一种变化趋势,而函数的自变量有 6 种变化趋势,分别为

$$x\to\infty,x\to+\infty,x\to-\infty,x\to x_0^-,x\to x_0^+,x\to x_0.$$

1. 函数 $f(x)$当自变量 x 趋于无穷远时的极限

定义 1.2.3 如果当自变量 x 的绝对值无限增大时,相应的函数值 $f(x)$无限接近于某一个固定常数 A,则称 A 为当函数 $f(x)$在 $x\to\infty$时的极限,记为$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to\infty)$.

定义 1.2.4　如果当自变量 x 无限增大时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一个固定的常数 A，则称 A 为当函数 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to+\infty)$.

定义 1.2.5　如果当自变量 x 无限减少时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一个固定的常数 A，则称 A 为当函数 $f(x)$ 在 $x\to-\infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to-\infty)$.

定理 1.2.1　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

2. 函数 $f(x)$ 当自变量 x 趋近于某一点时的极限

定义 1.2.6　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 内有定义，如果当自变量 x 在 $\mathring{U}(a,\delta)$ 内无限接近于 x_0 时，相应的函数值 $f(x)$ 无限接近于某一个固定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

定义 1.2.6 给出了函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限定义，其中自变量 x 从 x_0 的两侧同时趋近于 x_0. 但在有些问题中，函数仅在 x_0 的某一侧有定义或者函数虽在 x_0 的两侧皆有定义，但两侧的表达式不同（如分段函数的分段点），这时函数在这些点上的极限问题只能单侧地加以讨论.

如果函数 $f(x)$ 当 x 从 x_0 的左侧（即 $x<x_0$）趋于 x_0 时，以 A 为极限，则 A 称为 $f(x)$ 在 x_0 的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $f(x_0-0)=A$.

如果函数 $f(x)$ 当 x 从 x_0 的右侧（即 $x>x_0$）趋于 x_0 时以 A 为极限，则 A 称为 $f(x)$ 在 x_0 的右极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$.

这 3 种极限有如下关系：

定理 1.2.2　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$.

【案例分析 2】

例 1.2.2　(1)求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$.

(2)求 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$、$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$.

解　(1)由指数的性质容易得出：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}2^x=0$.

(2)由反三角函数的性质容易得出：

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

例 1.2.3　证明：符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, x<0,\\ 0, x=0,\\ 1, x>0\end{cases}$ 当 $x\to0$ 时极限不存在.

证明 $\lim\limits_{x\to0^-}\operatorname{sgn}x=\lim\limits_{x\to0^-}(-1)=-1$,

$\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{sgn}x=\lim\limits_{x\to0^+}1=1$.

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}\operatorname{sgn}x\neq\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{sgn}x$,所以由定理 1.2.2 推知 $\operatorname{sgn}x$ 当 $x\to0$ 时极限不存在.

例 1.2.4 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ 3-x, & 1<x\leqslant2,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

解 对于分段函数,讨论分段点处的极限.由于函数在分段点两边的解析式不同,所以,一般先求它的左、右极限.

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}2x=2,\qquad \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(3-x)=2.$$

因为 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$,所以 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=2$.

【理论学习 3】

三、两个重要极限

1. 第一重要极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

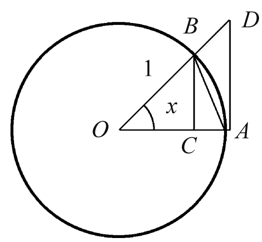

图 1.2.1

证明 作单位圆如图 1.2.1 所示,$BC\perp OA$,$DA\perp OA$.取圆心角 $\angle AOB=x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

显然 $\sin x=CB$,$x=\overset{\frown}{AB}$,$\tan x=AD$.

因为 $S_{\Delta AOB}<S_{扇形AOB}<S_{\Delta AOD}$,所以 $\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}\tan x$,即 $\sin x<x<\tan x$.

不等号各边都除以 $\sin x$,就有

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}\quad 或 \quad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

注意此不等式当 $\frac{\pi}{2}<x<0$ 时也成立.而 $\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$,又 $\lim\limits_{x\to0}1=1$,根据夹逼准则,$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

注意 在极限运算中,有时需要通过变量代换来化简极限式或把所求极限变成某个已知的极限.因此,此重要极限较常用的形式为

$$\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u}=1(其中\ u=\varphi(x),当\ x\to x_0\ 时,有\ u\to0).$$

2. 第二重要极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

这个极限我们在这里就不再证明了,下面给出这个重要极限的一个变形:

令 $u=\frac{1}{x}$，则 $x\to+\infty$时，$u\to 0$.

于是$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$，就变成了$\lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$.

【案例分析 3】

例 1.2.5　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{3}\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{2}{3}\lim\limits_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=\frac{2}{3}$.

例 1.2.6　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{\sin x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

例 1.2.7　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\cdot 1=1$.

例 1.2.8　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{\frac{x}{2}\to 0}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2=\frac{1}{2}$.

例 1.2.9　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$.

例 1.2.10　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^2=e^2$.

例 1.2.11　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$.

解　令 $t=-x$，则 $x=-t$，当 $x\to\infty$时，$t\to\infty$，故有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-1}=\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{-1}=\frac{1}{e}.$$

例 1.2.12　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]=\lim\limits_{x^2\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=e$.

例 1.2.13 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^x$.

解 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1+3}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{3}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{3}}\right]^3\cdot\left(1+\dfrac{3}{x-1}\right)=e^3$.

【拓展训练】

一、选择题

1. 下列数列极限存在的有(　　).

A. $10,10^2,10^3,10^4,\cdots$　　B. $\dfrac{3}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{4},\dfrac{4}{5},\cdots$

C. $2,2,3,3,4,4,\cdots$　　D. $1,-1,1,-1,1,\cdots$

2. 下列极限存在的有(　　).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x+1)}{x^2}$　　B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2^x-1}$　　C. $\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{1}{x}}$　　D. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x}}$

3. $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{1}{3}x+1\right)=$(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

4. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^3+1}{3-x}=$(　　).

A. 13　　B. 15　　C. 17　　D. 19

二、填空题

1. 问答题：

(1)有界数列是否一定收敛？________.

(2)无界数列是否一定发散？________.

2. 无穷数列$\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}(n=1,2,3,\cdots)$的各项和是________.

3. 在数列$\{a_n\}$中,若$\lim\limits_{n\to\infty}3na_n=1$,则$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=$________.

三、求下列数列的极限

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+n^2}{n^3}$;　(2)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4n^2}$;　(3)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n+1}{5n+1}$;　(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

四、计算下列函数的极限

(1)$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$;　(2)$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3}{x+1}$.

五、求下列极限

(1)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\omega x}{3x}$($\omega$为实数);　(2)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan3x}{4x}$;

(3)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan3x}{\tan4x}$;　(4)$\lim\limits_{x\to0}2x\cot x$;

(5)$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}$;　(6)$\lim\limits_{n\to\infty}3^n\sin\dfrac{x}{3^n}$.

六、求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{2x}\right)^{3x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{kx}$（$k$ 为正整数）.

任务 3　无穷小量与无穷大量

【理论学习 1】

一、无穷小量

1. 无穷小的定义

在实际问题中，常会遇到以零为极限的变量. 例如电容器放电时，其电压随时间的增加而逐渐减小并趋向于零；又如把石子投入水中，水波向四面传开，它的振幅随时间的增加而减小并趋向于零. 对于这种变量，给出下面的定义：

定义 1.3.1　在自变量 x 的某个变化过程 $x\to\Delta$ 中，以零为极限的变量称为 $x\to\Delta$ 时的无穷小量，简称无穷小.

注意：其中 $x\to\Delta$ 包含 $x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$，$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0$.

对于数列 $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\}$ 和 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$，当 $n\to\infty$ 时都以零为极限，所以它们都是无穷小量或称为无穷小数列. 对于函数 x^n（n 为正整数）、$\sin x$、$1-\cos x$，当 $x\to 0$ 时极限都等于零，所以当 $x\to 0$ 时，这些函数都是无穷小量.

注意　无穷小表达的是变量的变化状态，不能将其与很小的常数相混淆，在所有常数中，数零是唯一可作为无穷小的常数，这是因为 $\lim\limits_{x\to\Delta}0=0$.

2. 无穷小量的性质

在自变量的同一变化趋势下，无穷小量有如下性质：

性质 1.3.1　有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

性质 1.3.2　有限个无穷小的乘积仍是无穷小.

性质 1.3.3　有界量与无穷小的乘积仍是无穷小.

特别地，常数与无穷小之积仍是无穷小.

3. 函数极限与无穷小量的关系

由于 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=A$ 表示当 $x\to\Delta$ 时，函数 $f(x)$ 趋近于常数 A. 显然 $f(x)$ 趋近于 A 即等同于 $f(x)-A$ 趋近于零，即当 $x\to\Delta$ 时，变量 $f(x)-A$ 是无穷小. 容易看出，无穷小与极限之间的关系存在如下联系：

定理 1.3.1 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=A$ 的充要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to\Delta$ 时的无穷小.

证明 设 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=A$，令 $\alpha(x)=f(x)-A$，则

$$\lim_{x\to\Delta}\alpha(x)=\lim_{x\to\Delta}[f(x)-A]=\lim_{x\to\Delta}f(x)-A=A-A=0,$$

所以 $\alpha(x)$ 是当 $x\to\Delta$ 时的无穷小.

反之，设 $f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to\Delta$ 时的无穷小，则有

$$\lim_{x\to\Delta}f(x)=\lim_{x\to\Delta}[A+\alpha(x)]=A+\lim_{x\to\Delta}\alpha(x)=A.$$

【案例分析 1】

例 1.3.1 当 $x\to 0$ 时，下列变量中哪些是无穷小量？

$$10x、0.01x^2、\frac{2}{x}、\frac{1}{2}x+x^2、x\sin\frac{2}{x}.$$

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0}(10x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}(0.01x^2)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x+x^2\right)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\left(x\sin\frac{2}{x}\right)=0$，所以，当 $x\to 0$ 时，$10x$、$0.01x^2$、$\frac{1}{2}x+x^2$、$x\sin\frac{2}{x}$ 是无穷小量.

【理论学习 2】

4. 无穷小量的比较

我们已经知道，两个无穷小的和、差和乘积仍然是无穷小，但两个无穷小的商却会出现不同的情况. 例如 x、$2x$、x^2 都是当 $x\to 0$ 时的无穷小，而且 $\frac{x^2}{2x}=\frac{x}{2}\to 0$，即 $\frac{x^2}{2x}$ 仍是当 $x\to 0$ 时的无穷小，但 $\frac{x}{2x}\to\frac{1}{2}$，这说明 $\frac{x}{2x}$ 不再是当 $x\to 0$ 时的无穷小. 产生这种情况的原因在于各个无穷小趋于零的速度不一样，x^2 要比 $2x$ 趋于零的速度快，而 x 和 $2x$ 趋于零的快慢程度大致差不多. 为了对这种情况加以区别，我们引入无穷小量的阶的概念.

定义 1.3.2 设当 $x\to\Delta$ 时，$\lim\limits_{x\to\Delta}\alpha(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\Delta}\beta(x)=0$.

(1) 如果 $\lim\limits_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，那么称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 的高阶无穷小，记作 $\alpha(x)=o(\beta(x))\ (x\to\Delta)$.

(2) 如果 $\lim\limits_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，那么称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 的低阶无穷小.

(3) 如果 $\lim\limits_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$，那么称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小.

特别地，当 $c=1$ 时，则称 $x\to\Delta$ 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，记作

$$\alpha(x)\sim\beta(x)\ (x\to\Delta).$$

例如，由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，因此 $\sin x\sim x\ (x\to 0)$.

同样有：当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$.

下面我们介绍一个关于等价无穷小常用的性质——等价无穷小代换定理.

定理 1.3.2　设自变量在同一变化过程中，$f(x)$、$\alpha(x)$、$g(x)$、$\beta(x)$都是无穷小量，且$f(x)\sim\alpha(x)$，$g(x)\sim\beta(x)(x\to\Delta)$，$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$存在，则$\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$.

证明　由等价无穷小定义及已知条件，有

$$\lim_{x\to\Delta}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{f(x)}{\alpha(x)}\cdot\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\frac{\beta(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{f(x)}{\alpha(x)}\cdot\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\lim_{x\to\Delta}\frac{\beta(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\Delta}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

该定理表明，求两个无穷小比的极限时，可借助于等价无穷小来代替以简化计算. 这个定理在有些极限计算过程中会给我们带来意想不到的惊喜!

注意:等价无穷小代换只是对所求极限式中相乘或相除的因式进行替代，而对极限式中的相加或相减部分则不能随意替代. 如在上例中，若因有

$$\tan x\sim x(x\to 0),\sin x\sim x(x\to 0),$$

而推出$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$，则得到的是错误的结果.

以下是常用的几个等价无穷小代换，请读者要熟记.

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\dfrac{1}{n}x$.

【案例分析 2】

例 1.3.2　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 4x}$.

解　当 $x\to 0$ 时，$\tan 2x\sim 2x$，$\sin 4x\sim 4x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{4x}=\frac{1}{2}.$$

例 1.3.3　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan ax}{\sin bx}(a\cdot b\neq 0)$.

解　当 $x\to 0$ 时，$\arctan ax\sim ax$，$\sin bx\sim bx$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{bx}=\frac{a}{b}.$$

例 1.3.4　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解　当 $x\to 0$ 时 $\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

【理论学习3】

二、无穷大量

1.无穷大的定义

在自变量的某个变化过程 $x\to\Delta$ 中,绝对值可以无限增大的变量称为当 $x\to\Delta$ 时的无穷大量,简称无穷大.

应该注意的是:无穷大量是极限不存在的一种情形,我们借用极限的记号 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=\infty$,表示"当 $x\to\Delta$ 时,$f(x)$是无穷大量".

2.无穷小量与无穷大量的关系

(1)如果 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=0(f(x)\neq 0)$,那么 $\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

(2)如果 $\lim\limits_{x\to\Delta}f(x)=\infty$,那么 $\lim\limits_{x\to\Delta}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

因此,无穷大量的问题可以通过倒数变换转换为无穷小的问题来解决,反之亦然.

【案例分析3】

例 1.3.5 试计算下列极限:

(1)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x-1}{3x^3-2x^2+x}$;　(2)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x-1}{3x^4-2x^2+x}$;　(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2+x}{4x^3+x-1}$.

解 (1)当 $x\to\infty$时,分子、分母的极限都不存在,所以不能应用极限的四则运算法则.将分子分母同除以 x^3,得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+x-1}{3x^3-2x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}{3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{4}{3}.$$

(2)当 $x\to\infty$时,分子、分母的极限都不存在,所以不能应用极限的四则运算法则.将分子分母同除以 x^4,得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+x-1}{3x^4-2x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^4}}{3-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=0.$$

(3)因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+x-1}{3x^4-2x^2+x}=0$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x^2+x}{4x^3+x-1}=\infty$.

归纳例1.3.5的(1)、(2)、(3)可得出如下规律:

当 $a_0\neq 0,b_0\neq 0$ 时,有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0, & n>m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ \infty, & n<m.\end{cases}$$

【拓展训练】

一、选择题

1. 当 $x\to 0$，下列函数(　　)是无穷小量.

A. $1+x^2$　　B. $\sin(x+1)$　　C. $1-\cos x$　　D. $\ln(2+x)$

2. 当 $x\to 0$，与 x 等价的无穷小量是(　　).

A. $\sin x$　　B. $\cos x$　　C. $2x^2$　　D. $\dfrac{x^2}{2}$

二、计算题

利用等价无穷小的性质求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 2x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{\sin x}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{x}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$.

三、证明题

证明：当 $x\to 0$ 时，$\arcsin x\sim x$.

项目 1 知识点小结

1. 常用经济函数认识

(1)单利与复利；

(2)多次付息；

(3)贴现；

(4)总成本函数、总收入函数、总利润函数；

(5)需求函数与供给函数.

2. 极限

(1)数列极限，函数极限概念；

(2)极限运算方法；

(3)两个重要极限.

第一重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$；

第二重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

3. 无穷大量和无穷小量概念.

4. 常见无穷小替换

当 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}x$.

数学家简介——陈景润

陈景润，1933 年 5 月 22 日生于福建闽侯，家境贫寒，学习刻苦. 他在中小学读书时，就对数学情有独钟，一有时间就演算习题，在学校里成了个“小数学迷”. 他不善言辞，为人真诚和善，从不计较个人得失，把毕生经历都献给了数学事业. 高中没毕业就以同等学历考入厦门大学. 1953 年毕业于厦门大学数学系. 1957 年进入中国科学院数学研究所，并在华罗庚教授指导下从事数论方面的研究. 历任中国科学院数学研究所研究员、学术委员会委员兼贵阳民族学院、河南大学、青岛大学、华中工学院、福建师范大学等校教授，国家科委数学学科组成员，《数学季刊》主编等职. 主要从事解析数论方面的研究，并在哥德巴赫猜想研究方面取得国际领先的成果. 这一成果国际上誉为“陈氏定理”，受到广泛引用.

■主要成果

1742 年 6 月 7 日，德国数学家哥德巴赫提出一个未经证明的数学猜想“任何一个偶数均可表示两个素数之和”，简称“1＋1”. 这一猜想被称为“哥德巴赫猜想”. 中国人运用新的方法，打开了“哥德巴赫猜想”的奥秘之门，摘取了此项桂冠，为世人所瞩目. 这个人就是世界上攻克“哥德巴赫猜想”的第一个人——陈景润.

陈景润除攻克这一难题外，又把组合数学与现代经济管理、尖端技术和人类密切关系等方面进行了深入的研究和探讨. 他先后在国内外报刊上发明了科学论文 70 余篇，并有《数学趣味谈》《组合数学》等著作.

陈景润在解析数论的研究领域取得多项重大成果，曾获国家自然科学奖一等奖、何梁何利基金奖、华罗庚数学奖等多项奖励. 他是第四、五、六届全国人民代表大会代表. 著有《数学趣味谈》《组合数学》等.

■巨星的陨落

1984 年 4 月 27 日，陈景润在横过马路时，被一辆急驶而来的自行车撞倒，后脑着地，酿成意外的重伤. 雪上加霜，身体本来就不大好的陈景润，受到了几乎致命的创伤. 他从医院里出来，苍白的脸上，有时泛着让人忧郁的青灰色，不久，诱发了帕金森氏综合症. 1996 年 3 月 19 日，著名数学家陈景润因病长期住院，经抢救无效逝世，终年 63 岁.

项目 2
一元函数导数及其应用

在这一项目,我们将在函数与极限这两个概念的基础上来研究微分学的两个基本概念——导数与微分,同时引进导数和微分的计算方法,特别是导数在经济上的应用,是我们重点关注的内容.

本项目在专业课中的应用

- 用导数的方法分析需求价格弹性.
- 用导数的方法分析边际与边际分析.

任务 1　导数概念

【理论学习 1】

导数的定义

在实际生活中,我们经常会遇到有关变化率的问题.

1. 变速直线运动的瞬时速度

设一物体在 x 轴上从某一点开始作变速直线运动,已知运动规律为 $x=f(t)$. 记 $t=t_0$ 时质点的位置坐标为 $x_0=f(t_0)$. 当 t 从 t_0 变到 $t_0+\Delta t$ 时,路程 x 相应地从 x_0 变到 $x_0+\Delta x=f(t_0+\Delta t)$,因此质点在 Δt 这段时间内的路程是

$$\Delta x=f(t_0+\Delta t)-f(t_0).$$

而在 Δt 时间内质点的平均速度是

$$\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}.$$

显然,随着 Δt 的减小,平均速度 $\overline{v}$ 就越接近质点在 t_0 时刻的瞬时速度.但无论 Δt 取得怎样小,平均速度 $\overline{v}$ 总不能精确地刻画出质点运动在 $t=t_0$ 时变化的快慢.为此我们想到采取“极限”的手段,如果平均速度 $\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ 当 $\Delta t\to 0$ 的极限存在,那么把这个极限值 v 定义为质点在 $t=t_0$ 时的瞬时速度或速度:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}. \tag{2.1.1}$$

2.切线的斜率

如图 2.1.1 所示,设曲线 L:$y=f(x)$,$M_0(x_0,y_0)$ 为 L 上的一个定点,为求曲线 $y=f(x)$ 在点 M_0 切线的斜率,可在曲线上取邻近于 M_0 的一点 $M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$,则割线 MM_0 的斜率:

$$\tan\beta=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

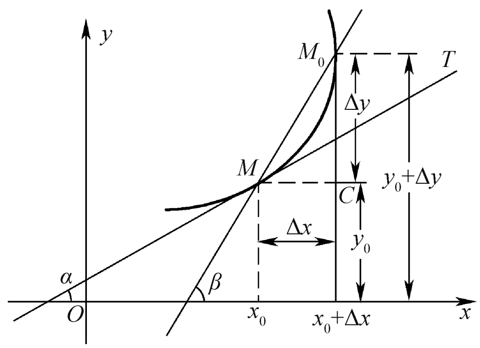

图 2.1.1

其中 β 为割线 MM_0 的倾斜角.令 $\Delta x\to 0$,M 就沿着 L 趋向于 M_0,割线 MM_0 就不断地绕 M_0 转动,角 β 也不断地趋向于 α,如果 $\tan\beta=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 $\Delta x\to 0$ 时极限存在,那么从解析几何知道,这个极限值就是曲线在 M_0 处切线的斜率 k,即 $k=\tan\alpha$.所以我们把曲线 $y=f(x)$ 在点 M_0 处的切线斜率定义为

$$k=\tan\alpha=\lim_{M\to M_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

则曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的切线方程为:

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{2.1.2}$$

以上虽然是两个实际含义不同的例子,但抽象成数量关系看,其实质是一样的,都是函数的改变量与自变量的改变量的比,当自变量的改变量趋于零时的极限.

定义 2.1.1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义,当自变量 x 在点 x_0 处有增量 $\Delta x(\Delta x\neq 0)$,$x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内时,相应地,函数有增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

若当 $\Delta x\to 0$ 时,$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{2.1.3}$$

存在,则称 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,并称此极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数,记为:$f'(x_0)$,$y'\Big|_{x=x_0}$,$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$,即